Der Jones-Index und Yang-Baxter Unterfaktoren

Bachelor-Arbeit

zur Erlangung des Grades

Bachelor of Science (B.Sc.)

Mathematik

an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

vorgelegt am 24.12.2024

von **Andreas Rothemund**

Betreuer: Prof. Dr. Gandalf Lechner

Friedrich-Alexander-Universität
Naturwissenschaftliche Fakultät

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Erlangen, den ____________________   ____________________

Datum   Unterschrift

Vorwort

Der Jones-Index ist eine Konjugationsinvariante zur strukturellen Untersuchung von Typ II_1 Faktoren $N \subseteq M$. Im Jahr 1983 legte Vaughan Jones mit seinem bedeutenden Resultat über die möglichen Indexwerte den Grundstein für die Theorie der Unterfaktoren. Während seiner Arbeit mit Faktoren gelang ihm eine Verbindung zur Knotentheorie und er entwickelte nebenher eine neue polynomielle Knoteninvariante. Unter anderem dafür wurde er 1990 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet.

Zunächst werden die wichtigsten Konstruktionen und Resultate für die nachfolgende Theorie vorgestellt, wobei ein Grundverständnis von Funktionalanalysis und Spektraltheorie vorausgesetzt wird. Anschließend definieren wir den Index und überzeugen uns von der Tatsache, dass die Menge der möglichen Indexwerte zwischen 1 und 4 auf $\{4\cos^2(\frac{\pi}{n}) \mid 3 \leq n \in \mathbb{N}\}$ eingeschränkt werden kann. Dabei orientieren wir uns in den ersten beiden Kapiteln hauptsächlich an den Standardwerken zu Operatoralgebren wie Kadison [9], Takesaki [18] und Blackadar [2]. Die Skripte über Von-Neumann-Algebren von Strătilă und Zsidó [17] sowie Jones [5] erweisen sich als sehr nützlich. Im dritten Kapitel nehmen wir noch Notizen von Speicher [16] dazu.

Im letzten Kapitel möchten wir bestimmte Faktoren genauer betrachten, welche durch $\mathcal{R}$-Matrizen induziert werden. Dabei ist eine $\mathcal{R}$-Matrix ein unitärer Endomorphismus $R \in \mathrm{End}(V \otimes V),\ \dim(V) < \infty$, welcher der Yang-Baxter Gleichung

$$(R \otimes 1)(1 \otimes R)(R \otimes 1) = (1 \otimes R)(R \otimes 1)(1 \otimes R)$$

genügt. Die Menge aller $\mathcal{R}$-Matrizen ist im Allgemeinen schwer zu beschreiben, dennoch gibt es Klassifikationsresultate über bestimmte Klassen von Lösungen wie etwa für involutive $\mathcal{R}$-Matrizen [10]. Eine Darstellung der unendlichen Zopfgruppe resultiert dann in II_1 Faktoren $N_R \subset M_R$. Es ist naheliegend, dass der Jones-Index $[M_R : N_R]$ abhängig von der $\mathcal{R}$-Matrix ist. Owen Tanner betrachtete Normalformen von involutiven $\mathcal{R}$-Matrizen und stellte fest, dass unter bestimmten Bedingungen (siehe Kapitel 4.1) für den Index gilt:

$$[M_R : N_R] = \mathrm{tr}((\mathrm{ptr}(R)^{-1})^* \mathrm{ptr}(R)^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\beta_i},$$

wobei $\mathrm{ptr} = 1_V \otimes \mathrm{tr} : \mathrm{End}(V \otimes V) \to \mathrm{End}(V)$ die partielle Spur bezeichnet und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ die Thoma Parameter der involutiven $\mathcal{R}$-Matrix R sind. Für einige konkrete $\mathcal{R}$-Matrizen, welche den Voraussetzungen nicht genügen, kann die Formel ebenfalls bestätigt werden. Daher stellt sich die Frage in welcher Allgemeinheit die Formel gilt. An dieser Stelle sei bemerkt, dass im Allgemeinen nicht bekannt ist, ob $\mathrm{ptr}(R)$ invertierbar ist, allerdings ist für involutives R die Existenz von $\mathrm{ptr}(R)^{-1}$ gesichert.

Wir werden in Abschnitt 4.2 die Indexvermutung für Temperley-Lieb $\mathcal{R}$-Matrizen bestätigen und strukturelle Einschränkungen für solche mit trivialer partieller Spur erhalten.

Der Begriff *Hilbertraum* bezeichnet im Folgenden einen komplexen Hilbertraum und *linear* meint komplex-linear. Eine Projektion p ist im Folgenden immer orthogonal, also $p = p^2 = p^*$. Die GNS Konstruktion einer Von-Neumann-Algebra M bezüglich eines Zustands τ bezeichnen wir mit $(L^2(M), \pi_\tau, \Omega_\tau) = (\mathcal{H}_\tau, \pi_\tau, \Omega_\tau)$.

Inhaltsverzeichnis

1 Projektionen und Faktoren

$M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ bezeichnet in diesem Kapitel eine Von-Neumann-Algebra, falls nicht anders erwähnt.

1.1 Grundlegende Eigenschaften von Projektionen

Für die später vorgestellte Definition des Jones-Index werden Projektionen unentbehrlich. Dieses Kapitel soll eine allgemeine Einführung in das Thema mit grundlegenden Tatsachen und wichtigen Ergebnissen darstellen. Fortan orientieren wir uns in diesem Abschnitt an den Standardwerken von Takesaki [18], Kadison [9] und Blackadar [2], sowie einem Skript von Strătilă und Zsidó [17] und Notizen von Jones [5].

> **Definition 1.1** Projektionen $p, q \in M$ heißen äquivalent, falls eine partielle Isometrie $u \in M$ existiert mit $u^*u = p$ und $uu^* = q$. Wir schreiben $p \sim q$. p heißt q untergeordnet ($p \preceq q$), wenn $p \sim q' \leq q$,

Durch $\sim$ wird eine Äquivalenzrelation definiert: Für Projektionen p, q, r gilt
1. $p \sim p,$ denn $p = p^*p = pp^*$,
2. $p \sim q \implies q \sim p$, da für eine partielle Isometrie u auch u^* eine ist, und
3. $u^*u = p,\ uu^* = q = w^*w,\ ww^* = r$ ergibt $(wu)^*wu = p$ sowie $wu(wu)^* = r$.

Beide Relationen hängen natürlich von M ab. Für paarweise orthogonale Projektionen[1] wird $\sim$ additiv, denn sind zwei Familien paarweise orthogonaler Projektionen $\{e_i\}_{i\in I}$ und $\{f_i\}_{i\in I}$ sowie partielle Isometrien $\{u_i\}_{i\in I}$ mit $u^*u_i = e_i, u_iu_i^* = f_i\ \forall i \in I$ gegeben, so konvergiert $\sum_{i\in I} u_i$ in der starken Operator Topologie gegen die partielle Isometrie, welche $\sum_{i\in I} e_i \sim \sum_{i\in I} f_i$ induziert (siehe auch [17]).

Mit $\mathscr{P}_M$ bezeichnen wir die Menge der Projektionen auf M und $\mathcal{P}_X$ sei die Projektion auf einen abgeschlossenen Unterraum $X \subseteq \mathcal{H}$. Für eine Familie abgeschlossener Räume wird mit den Operationen

$$\bigwedge_{i\in I} \mathcal{P}_{X_i} := \mathcal{P}_{\bigcap_{i\in I} X_i}, \quad \bigvee_{i\in I} \mathcal{P}_{X_i} := \mathcal{P}_{\overline{\operatorname{span}_{i\in I}\{X_i\}}}$$

die Menge der Projektionen in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ zu einem vollständigen Verband. Mit anderen Worten besitzt eine beliebige Familie von Projektionen ein Supremum und Infimum bezüglich der Standardordnung für selbstadjungierte Elemente. Wegen $\mathcal{P}_X \leq \mathcal{P}_Y \iff X \subseteq Y$ ist klar, dass $\bigvee_{i\in I} \mathcal{P}_{X_i}$ (bzw. $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{P}_{X_i}$) tatsächlich das Supremum (bzw. Infimum) sind (mehr über Verbände bei [15] und [2, Abschnitt I.5.1]). Auch in beliebigen Von-Neumann-Algebren wird $\mathscr{P}_M$ mit den soeben definierten Operationen zu einem vollständigen Verband. Dies folgt aus der SOT-Abgeschlossenheit sowie dem Satz von Vigier:

> **Satz 1.2** (Vigier) Sei $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein monoton wachsendes, beschränktes Netz selbstadjungierter Operatoren[a], dann existiert ein selbstadjungiertes $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit

[1] Projektionen p und q heißen orthogonal ($p \perp q$), falls $pq = 0$

$x_i \longrightarrow x$ in der starken Operator Topologie. Ferner gilt $x = \sup_{i\in I} x_i$.

[a] das heißt: $i \precsim j \implies x_i \leq x_j$ und $\exists\, c \in \mathbb{R}\ \forall\, i \in I : \|x_i\| \leq c$

Wir verzichten an dieser Stelle auf den Beweis von 1.2 und verweisen auf [12, Satz 4.1.1]. Analog gilt das Resultat auch für beschränkte monoton fallende Netze selbstadjungierter Operatoren. Im Folgenden notieren wir einen SOT-Limes $x_i \xrightarrow{SOT} x$ mit $x = \text{s-lim}_{i\in I}\, x_i$. Zunächst überzeugen wir uns, dass für Projektionen $p, q \in M$ auch $p \wedge q,\ p \vee q \in M$ gilt. Wegen $p \vee q = (p^\perp \wedge q^\perp)^\perp$ reicht es zu zeigen[2]:

Lemma 1.3 Seien $p, q \in M$ Projektionen. Dann gilt $p \wedge q = \text{s-lim}_{n\to\infty}(pqp)^n \in M$.

Beweis: Man sieht schnell, dass alle $(pqp)^n$ selbstadjungiert und positiv sind. Diese bilden eine monoton fallende Folge, denn für $n = 2k$ gilt

$$\langle x, ((pqp)^n - (pqp)^{n+1})x\rangle = \langle (pqp)^k x, (1 - pqp)(pqp)^k x\rangle \geq 0, \text{ denn } 1 - pqp \geq 0.$$

Für $n = 2k + 1$ haben wir

$$\langle x, ((pqp)^{2k+1} - (pqp)^{2k+2})x\rangle = \langle (pqp)^k x, (qpq - (qpq)^2)(pqp)^k x\rangle \geq 0,$$

denn $(pqp - (pqp)^2) \geq 0$:

$$\langle x, (pqp - (pqp)^2)x\rangle = \langle x, (pqqp - pqpqp)x\rangle = \langle qpx, (1 - p)qpx\rangle.$$

Auf diese monoton fallende Folge positiver, selbstadjungierter Operatoren können wir 1.2 anwenden und definieren das selbstadjungierte $P = \text{s-lim}_{n\to\infty}(pqp)^n$. P ist eine Projektion: Zunächst gilt für festes $j \in \mathbb{N}$

$$(pqp)^j P = (pqp)^j \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty}(pqp)^n = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty}(pqp)^j(pqp)^n = P$$

und somit

$$P^2 = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty}(pqp)^n P = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} P = P.$$

Wegen $Px = x$ für $x \in \mathrm{im}(p) \cap \mathrm{im}(q)$ gilt $p \wedge q \leq P$ und ebenso $P \leq p$. Wiederholt man die gleiche Argumentation für die Folge $((qpq)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, so erhält man eine Projektion Q mit $p \wedge q \leq Q$ und $Q \leq q$. Wir zeigen $P = Q$. Wegen

$$(pqp)^j(qpq)^k(pqp)^n = (pqp)^{j+k+n+1}$$

gilt also $PQP = P$. Damit erhalten wir für alle $x \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\|Px\| =& \langle x, Px\rangle = \langle x, PQPx\rangle = \langle QPx, QPx\rangle\\ =& \langle Px, Px\rangle - \langle Px, Px\rangle + 2\mathrm{Re}\langle QPx, QPx\rangle - \langle QPx, QPx\rangle\\ =& \|Px\| - \|Px - QPx\|\end{aligned}$$

Somit folgt $P = QP$, analog auch $QPQ = Q$ und $Q = PQ$. Mit der Rechnung

$$\begin{aligned}\|(P - Q)x\| =& \|Px\| + \|Qx\| - \langle Px, Qx\rangle - \langle Qx, Px\rangle\\ =& \|Px\| + \|Qx\| - \langle Px, x\rangle - \langle Qx, x\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}\end{aligned}$$

leitet man $P = Q$ ab. Mit $P \leq q$ folgt jetzt insgesamt $p \wedge q = P$. □

[2] gemeint ist $p^\perp = 1 - p$

Sei nun $\{p_i\}_{i\in I} \subset M$ eine beliebige Familie von Projektionen in einer Von-Neumann-Algebra und definiere für jede endliche Teilmenge $F \subseteq I$ $x_F = \bigvee_{i\in F} p_i$. Damit bildet $\{x_F\}_{F\subseteq I, |F|<\infty}$ ein beschränktes, monoton wachsendes Netz von Projektionen. Nach 1.2 konvergiert das Netz in der starken Operator Topologie gegen $\bigvee_{i\in I} p_i \in \mathscr{P}_M$. Damit ist nun gezeigt:

Satz 1.4 Die Menge aller Projektionen in einer Von-Neumann-Algebra bildet einen vollständigen Verband.

Lemma 1.5 Mit $\preceq$ wird eine Halbordnung auf den Äquivalenzklassen von Projektionen in M induziert: $[p] \preceq [q] \;:\Longleftrightarrow\; p \preceq q$.

Beweis: Zunächst zeigen wir Wohldefiniertheit: Sei $p \preceq q$ und $p' \in [p]$. Dann gilt natürlich $p' \sim p \preceq q$. Für $q' = uu^* \sim u^*u = q$ zeigen wir $p \preceq q'$. Nach Annahme gilt $p = v^*v \sim vv^* = b \leq q$. Damit auch $ubu^* \leq uqu^* = uu^*uu^* = q'$. Jetzt gilt $ubu^* = uvv^*u^*$ und $v^*u^*uv = v^*vv^*qv = v^*bqv = v^*bv = v^*vv^*v = p$. Also $p \sim ubu^* \leq q'$.

Die Reflexivität von $\preceq$ ist klar. Für die Transitivität betrachte man partielle Isometrien u, v sowie Projektionen e, f, g mit $u^*u = e, uu^* \leq f$ und $v^*v = f, vv^* \leq g$. Dann gilt $vuu^*v^* \leq vv^* \leq g$ und die partielle Isometrie vu erfüllt

$$u^*v^*vu = u^*fu = u^*fuu^*u = u^*uu^*u = e.$$

Damit gilt also $e \preceq g$.
Für die Antisymmetrie betrachte man wieder Projektionen e, f und partielle Isometrien u, v mit $u^*u = e,\; uu^* \leq f,\; v^*v = f,\; vv^* \leq e$. Nun definieren wir auf der Menge $\mathcal{P}_{\leq f} := \{g \in \mathscr{P}_M : g \leq f\}$ die Funktion

$$\Phi(g) := f - u(e - vgv^*)u^*.$$

Mit $g, h \in \mathcal{P}_{\leq f},\; g \leq h$ und

$$\Phi(h) - \Phi(g) = uv(h-g)v^*u^* \geq 0$$

sieht man, dass Φ monoton wachsend ist.
Betrachte die Teilmenge $X := \{g \in \mathcal{P}_{\leq f} : g \leq \Phi(g)\}$ und $h := \bigvee_{g\in X} g$. Mit der Monotonie von Φ folgt für $g \in X$ sofort $g \leq \Phi(g) \leq \Phi(h)$, denn $g \leq h$ und damit gilt $h \leq \Phi(h)$. Wieder schließen wir mit der Monotonie $\Phi(h) \leq \Phi(\Phi(h))$ und so $\Phi(h) \in X$. Die Definition von h impliziert also auch $\Phi(h) \leq h$, insgesamt $h = \Phi(h) = f - u(e - vhv^*)u^*$.
Wegen

$$(e - vhv^*)^2 = e - evhv^* - vhv^*e + vhv^* = e - vhv^*$$

ist $(e-vhv^*)u^*$ eine partielle Isometrie, welche $f-h \sim e-vhv^*$ ergibt. Abschließend liefert die partielle Isometrie hv^* die Äquivalenz $h \sim vhv^*$. Da $h \perp h-f$ und $e - vhv^* \perp vhv^*$ folgt $f \sim h$. $\square$

Dabei steht die Antisymmetrie von $\preceq$ ganz in Analogie zur mengentheoretischen Aussage: (A gleichmächtig zu $A' \subseteq B$ und B gleichmächtig zu $B' \subseteq A$) $\implies$ (A gleichmächtig zu B). Deshalb ist sie oft unter dem Namen Cantor-Schröder-Bernstein Eigenschaft vorzufinden.

Bemerkung 1.6 Für Beweise ist es oft praktisch, dass sich jedes Element einer Von-Neumann-Algebra als Linearkombination aus vier unitären Elementen schreiben lässt. Dazu zerlegt man beliebiges a zunächst wie gewohnt in selbstadjungierte Operatoren ($a = \frac{a+a^*}{2} + i\frac{a-a^*}{2i}$). Ein selbstadjungiertes Element s mit $\|s\| \leq 1$ kann man nun schreiben als $s = \frac{u+u^*}{2}$ wobei $u := s + i\sqrt{1-s^2}$ unitär ist.

Analog kann man Elemente auch als Kombination vier positiver Elemente ausdrücken, indem man selbstadjungiertes s wie folgt schreibt: $s = \max(s,0) - (-\min(s,0))$.

Für $x \in M$ sei der linke Träger $l(x)$ (bzw. rechte Träger $r(x)$) die kleinste Projektion $e \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $ex = x$ (bzw. $xe = x$). Natürlich gilt $l(x) = \mathcal{P}_{\overline{x\mathcal{H}}}$ und $r(x) = 1 - \mathcal{P}_{\ker(x)}$. Insbesondere folgt für $x \in M$ mit der Tatsache, dass Von-Neumann-Algebren unter Polarzerlegung abgeschlossen sind [1, 2.2.4] auch $l(x), r(x) \in M$ und $l(x) \sim r(x)$: Die partielle Isometrie der Polarzerlegung von $x = u|x|$ ergibt

$$l(x) = uu^* \sim u^*u = 1 - \mathcal{P}_{\ker(|x|)} = 1 - \mathcal{P}_{\ker x} = r(x).$$

Der zentrale Träger $z(p)$ für $p \in \mathscr{P}_M$ ist definiert als die kleinste zentrale Projektion, welche p majorisiert[3]. Gilt $z(e) \perp z(f)$ für Projektionen e, f so heißt e zentral orthogonal zu f.

Das nächste Lemma besagt, dass man eine Von-Neumann-Algebra auf $\mathcal{H}$ mit einer Projektion gewissermaßen verkleinern kann. Wir bemerken zunächst allgemein, dass für $x \in M, y \in M'$ gilt: $xy = 0 \iff z(x)z(y) = 0$ [9, 5.5.4]. Aufgrund der Relevanz führen wir den Beweis von 1.8 aus. Davor noch eine Proposition:

Proposition 1.7 Sei $p \in M$ eine Projektion. Die Abbildung $ap \mapsto az(p)$ ist ein *-Isomorphismus von $M'p$ nach $M'z(p)$

Beweis: Elementare Rechnung zeigt, dass die Abbildung additiv und multiplikativ ist sowie mit * verträglich ist und Surjektivität ist auch klar. Es bleibt Wohldefiniertheit zu zeigen, also $ap = 0,\ a \in M' \implies az(p) = 0$.
Wegen [9, 5.5.4] gilt $ap = 0 \implies z(a)z(p) = 0$ und so auch $0 = az(a)z(p) = az(p)$. Also ist die Abbildung wohldefiniert und wegen $az(p) = 0 \implies 0 = az(p)p = ap$ auch injektiv. □

Lemma 1.8 Sei M eine Von-Neumann-Algebra auf $\mathcal{H}$ und $p \in M$ eine Projektion. Dann gilt $pMp = (M'p)'$ und $(pMp)' = M'p$ auf $p\mathcal{H}$ und pMp sowie $M'p$ sind damit Von-Neumann-Algebren auf $p\mathcal{H}$. Ferner ist $Z(M'p) = Z(M)p$.

Beweis: Elementare Rechnung zeigt, dass pMp und $M'p$ auf $p\mathcal{H}$ kommutieren. Sei nun $x \in (M'p)' \subseteq \mathcal{B}(p\mathcal{H})$. Wir zeigen $xp = px \in M$. Für $y \in M'$ gilt wegen $yp = py$ auch $ypx = xyp = xpy = pxy$. Mit dem Bikommutantensatz folgt $xp \in M$. Ferner gilt $x = pxp$ auf $p\mathcal{H}$. Also insgesamt $x \in pMp$ und $(M'p)' = pMp$.

Um $(pMp)' \subseteq M'p$ einzusehen reicht es nach 1.6 die Aussage für unitäres $u \in (pMp)'$ zu zeigen. Dafür definieren wir $\mathcal{K} := \overline{Mp\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{H}$ und $q := \mathcal{P}_{\mathcal{K}}$. Dann sieht man mit der Dichtheit von $Mp\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$ sofort, dass $\mathcal{K}$ invariant unter M sowie M' ist, also gilt $q \in Z(M)$. Unitäres $u \in (pMp)' \subseteq \mathcal{B}(p\mathcal{H})$ setzen wir auf $\mathcal{K}$ mit Dichtheit folgendermaßen fort:

$$\tilde{u}\Big(\sum x_i \xi_i\Big) := \sum x_i u \xi_i, \quad \forall x_i \in M,\ \xi_i \in p\mathcal{H}.$$

[3] analog für $a \in M$: $z(a) := \bigwedge_{p \in X} p$ wobei $X = \{p \in \mathscr{P}_{Z(M)} \mid pa = a\}$

Die Wohldefiniertheit der Fortsetzung folgt, da $\tilde{u}$ eine Isometrie ist:

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\Big(\sum x_i\xi_i\Big)\|^2 &= \sum_{i,j}\langle x_iu\xi_i, x_ju\xi_j\rangle \overset{\xi_i=p\xi_i}{\underset{up=pu}{=}} \sum_{i,j}\langle x_ipu\xi_i, x_jpu\xi_j\rangle = \sum_{i,j}\langle px_j^*x_iu\xi_i, u\xi_j\rangle \\ &\overset{u\in(pMp)'}{=} \sum_{i,j}\langle upx_j^*x_ip\xi_i, u\xi_j\rangle \overset{u \text{ unitär}}{=} \sum_{i,j}\langle px_j^*x_ip\xi_i, \xi_j\rangle = \sum_{i,j}\langle x_i\xi_i, x_j\xi_j\rangle\end{aligned}$$

Also lässt sich u mit $\tilde{u}$ zu einer Isometrie auf $\mathcal{K}$ fortsetzen. Wieder folgt mit der Dichtheit von $Mp\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$, dass $\tilde{u}$ auf $\mathcal{K}$ mit M kommutiert. Wir schließen $\tilde{u}q \in M'$ und mit $u = \tilde{u}qp$ auf $p\mathcal{H}$ folgt $(pMp)' = M'p$.

Sei $x \in Z(M'z(p))$. Dann gilt insbesondere $x = xz(p) \in M'$ und für $a \in M'$

$$xa(1-z(p)) = xz(p)a(1-z(p)) = xaz(p)(1-z(p)) = 0 = a(1-z(p))z(p)x = a(1-z(p))x$$

auf $\mathcal{H}$. Mit $a = az(p) + a(1-z(p))$ und $az(p) \in M'z(p)$ folgt $xa = ax$, also nach dem Bikommutantensatz $x \in M$. Insgesamt also $x \in M \cap M' = Z(M)$ und $x \in Z(M)z(p)$. Natürlich kommutiert $Z(M)z(p)$ mit $M'z(p)$. Also gilt $Z(M'z(p)) = Z(M)z(p)$. Nach 1.7 gilt also auch $Z(M'p) = Z(M)p$. □

1.2 Zerlegung von Von-Neumann-Algebren

Definition 1.9 Ein Faktor ist eine Von-Neumann-Algebra $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit trivialem Zentrum, das heißt:

$$Z(M) = \{a \in M \mid \forall\, b \in M : ab = ba\} = \mathbb{C}1_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$$

Mit $Z(M) = M \cap M'$ ist klar, dass das Zentrum eine abelsche Von-Neumann-Algebra ist.

Beispiel 1.10 Mit Hilfe des Bikommutantensatzes kann man schnell zeigen, dass $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein Faktor ist. Man sieht elementar $(\mathbb{C}1)' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Da $\mathbb{C}1$ eine Von-Neumann-Algebra ist, folgt

$$\mathcal{B}(\mathcal{H})' = (\mathbb{C}1)'' = \mathbb{C}1$$

und damit ist per Definition $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein Faktor.

Wir wollen nun zeigen, dass in einem Faktor je zwei Projektionen bezüglich $\preceq$ vergleichbar sind.

Lemma 1.11 Sei M ein Faktor und $0 \neq p, q \in M$ Projektionen. Dann existiert unitäres $x \in M$ mit $pxq \neq 0$.

Beweis: Angenommen $puq = 0$ gilt für alle unitären $u \in M$. So wäre auch $u^*puq = 0$. Sei nun $a := \bigvee_{u\in M \text{ unitär}} u^*pu$ das Supremum der Projektionen u^*pu. Damit folgt auch $aq = 0$. Unitäres $v \in M$ kommutiert wegen

$$v^*\Bigg(\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu\Bigg)v = \bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} v^*u^*puv = \bigvee_{\substack{w\in M\\ \text{unitär}}} w^*pw = a$$

mit a. Wegen 1.6 folgt $a \in M'$. Da M ein Faktor ist, sind die einzigen Projektionen in M' 0 und 1. Da $0 \neq p \leq a$ muss $a = 1$ gelten, im Widerspruch zu $aq = 0$. □

Korollar 1.12 Sei M ein Faktor und $p, q \in M$ Projektionen beide ungleich 0. Dann existiert eine partielle Isometrie $0 \neq u \in M$ mit $uu^* \leq p$ und $u^*u \leq q$.

Beweis: Wähle u als die partielle Isometrie der Polarzerlegung von pxq, wobei x wie in 1.11 gewählt ist, dass $pxq \neq 0$. Dann ist u^*u die Projektion auf $(\ker pxq)^\perp$. Wegen $(\ker pxq)^\perp \subseteq (\ker q)^\perp$ gilt also $u^*u \leq q$. Analog folgt $uu^* \leq p$. □

Mithilfe von 1.12 und des Auswahlaxioms können wir zeigen:

Satz 1.13 Auf einem Faktor M wird $\preceq$ zu einer Totalordnung.

Beweis: Sei U die Menge aller partiellen Isometrien u mit $uu^* \leq p$ und $u^*u \leq q$. Elementar sieht man, dass mit $u \lesssim v \iff (u^*u \leq v^*v$ und $vu^*u = u)$ eine Halbordnung auf U definiert ist. Das Lemma von Zorn garantiert die Existenz eines maximalen Elements $\tilde{u} \in U$. Angenommen die Projektionen $q - \tilde{u}^*\tilde{u}$, $p - \tilde{u}\tilde{u}^*$ sind beide ungleich 0. Dann gibt es nach 1.12 eine partielle Isometrie $v \neq 0$ mit $v^*v \leq q - u^*u$ und $vv^* \leq p - uu^*$. Aber dann ist $\tilde{u} \leq \tilde{u} + v \in U$ im Widerspruch zur Maximalität von $\tilde{u}$. Folglich gilt $\tilde{u}\tilde{u}^* = p$ oder $\tilde{u}^*\tilde{u} = q$. □

Jede Von-Neumann-Algebra lässt sich in eine Summe vier verschiedener Arten von Von-Neumann-Algbren zerlegen. Zunächst führt man folgende Begriffe für Projektionen ein (wir orientieren uns an Takesaki [18]):

Definition 1.14 Sei $p \in \mathscr{P}_M$ fest und $q \in \mathscr{P}_M$ beliebig.
a) $p \neq 0$ heißt *minimal*, falls $q \leq p \implies q = 0 \vee q = p$.
b) p heißt *endlich (engl. finite)*, falls $p \sim q \leq p \implies q = p$, ansonsten heißt p *unendlich*.
c) p heißt *rein unendlich (engl. purely infinite)*, falls es keine endliche Projektion $f \neq 0$ gibt mit $f \leq p$.
d) p heißt *echt unendlich (engl. properly infinite)*, falls für jede zentrale Projektion $z \in M$ mit $zp \neq 0$ folgt, dass zp unendlich ist.
e) p heißt *abelsch*, falls pMp abelsch ist.
f) M heißt endlich/unendlich/rein unendlich/echt unendlich, falls $1_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \in M$ die gleichbenannte Eigenschaft besitzt.

Beispiel 1.15 **a)** Für $\dim \mathcal{H} = \infty$ ist $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ unendlich, denn es existiert eine nicht surjektive Isometrie $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (Shiftoperator). Damit ist $u^*u = 1$, aber $uu^* \neq 1$ und somit $uu^* < 1$.

b) Ist q endlich und $p \leq q$, so ist auch p endlich. Denn sei $p \sim p' \leq p$ gegeben. Dann ist $q - p$ eine Projektion orthogonal zu p. Da $\sim$ addiditv für orthogonale Projektionen ist folgt $q = p + (q - p) \sim p' + (q - p) \leq q$. Weil q endlich war gilt also $q = p' + q - p$. Also ist $p = p'$ und damit p endlich.

Ein leichtes Argument zeigt, dass in einer Von-Neumann-Algebra M die Minimalität einer Projektion p äquivalent zu $pMp = \mathbb{C}p$ ist. In diesem Fall sind minimale Projektionen also abelsch. Weiter gilt:

Proposition 1.16 **a)** Abelsche Projektionen sind endlich.
b) In einem Faktor ist jede abelsche Projektion ungleich 0 minimal.

Beweis: **a)** Sei p eine abelsche Projektion und $u^*u = p \sim uu^* \leq p$. Es gilt

$$u = uu^*u = puu^*u = pup \in pMp.$$

Also gilt $u^* = pu^*p$ und da pMp abelsch ist folgt:

$$p = u^*u = pu^*ppup = puppu^*p = uu^*.$$

b) Folgt unmittelbar aus 1.8: Es gilt $Z(pMp) = Z(M)p$ und da $p \in \mathscr{P}_M$ abelsch ist folgt $pMp = Z(pMp) = \mathbb{C}p$. Damit ist p per Definition minimal. ☐

Lemma 1.17 $p \in \mathscr{P}_M$ habe keine abelschen Unterprojektionen ungleich 0. Dann existieren $q_1, q_2 \in \mathscr{P}_M$ mit $q_1 \perp q_2,\ q_1 \sim q_2$ und $p = q_1 + q_2$.

Beweis: Das Lemma von Zorn liefert ein maximales Paar $((q_{1,i})_{i\in\mathcal{I}}, (q_{2,i})_{i\in\mathcal{I}})$ von Familien paarweiser orthogonaler Projektionen mit $q_{1,i}, q_{2,i} \leq p,\ q_{1,i} \perp q_{2,i},\ q_{1,i} \sim q_{2,i}\ \forall i \in \mathcal{I}$. Aufgrund der Orthogonalität gilt dann $p \geq q_1 := \bigvee_i q_{1,i} \sim \bigvee_i q_{2,i} =: q_2 \leq p$ sowie $q_1 \perp q_2$.

Gilt $f := p - q_1 - q_2 \neq 0$, so ist f nach Annahme nicht abelsch. Also besitzt f eine Unterprojektion e, die nicht zentral in fMf ist. Das heißt es exsitiert $x \in M$ mit $fxe \neq exf$. Damit erhält man $eM(f-e) \neq \{0\}$, denn es gilt: $eM(f-e) = \{0\} \implies (e-f)Me = 0$ und so

$$efxf - fxfe = exf - fxe = ex(f-e) + (e-f)xe + fxe - fxe = 0,$$

im Widerspruch zu $fxe \neq exf$. Also sei $0 \neq a := ex(f-e) \in eM(f-e)$. So ist

$$e \geq l(a) \perp r(a) \leq f - e,\ l(a) \sim r(a),\ l(a), r(a) \leq p$$

im Widerspruch zur Maximalität oben. Also gilt $f = 0$ und $p = q_1 + q_2$. ☐

Die Eigenschaften abelsch und endlich übertragen sich auf Suprema zentral orthogonaler Projektionen:

Lemma 1.18 Seien $\{e_i\}_{i\in I} \subset M$ paarweise zentral orthogonale endliche (abelsche) Projektionen. Dann ist auch $e = \bigvee_i e_i = \sum_i e_i$ endlich (abelsch).

Beweis: Wir zeigen die Aussage für endliche Projektionen: Sei also $f \in \mathscr{P}_M,\ e \sim f \leq e$. Es gilt $e - e_i \leq \bigvee_{j\neq i} z(e_j)$. Multiplikation mit $z(e_i)$ und die Orthogonalität ergibt $e_i = ez(e_i)$. Da alle e_i endlich sind und $z(e_i)$ natürlich mit f kommutiert, erhalten wir

$$e_i = fz(e_i) \leq f \quad \forall\, i \in I$$

und damit auch $e = \bigvee_i e_i = f$.

Für zentral orthogonale abelsche e_i sieht man für $x \in M$ mit

$$exe = \bigvee_i e_i x \bigvee_j e_j = \sum_i e_i x e_i$$

direkt auch $exeeye = eyeexe$, also ist eMe abelsch. ☐

Definition 1.14 erlaubt es, bestimmte Von-Neumann-Algebren anhand von Projektionen zu charakterisieren.

Definition 1.19 Sei M eine Von-Neumann-Algebra.
a) M hat Typ I, falls jede zentrale Projektion ungleich 0 eine abelsche Projektion ungleich 0 majorisiert.
b) M hat Typ II, falls es keine abelschen Projektionen ungleich 0 gibt und jede zentrale Projektion ungleich 0 eine endliche Projektion ungleich 0 majorisiert.
c) M hat Typ II_1, falls M von Typ II und endlich ist.
d) M hat Typ II_∞, falls M von Typ II ist und keine zentrale endliche Projektion ungleich 0 hat.
e) M hat Typ III, falls es keine endlichen Projektionen ungleich 0 gibt, also genau dann falls M rein unendlich ist.

Das folgende Resultat besagt, dass die eben definierten Typen Grundbausteine für Von-Neumann-Algebren sind.

Satz 1.20 Jede Von-Neumann-Algebra M lässt sich eindeutig als direkte Summe von solchen mit Typ I, Typ II_1, Typ II_∞ und Typ III schreiben. Eine Projektion $p \in M$ lässt sich als eindeutige Summe von zentral orthogonalen Projektionen $p_1, p_2 \in M$ schreiben, sodass p_1 endlich und p_2 echt unendlich ist.

Der Beweis findet sich bei Takesaki [18, Vol. I, V 1.19].
Mit 1.16b) reduziert sich Definition 1.19 für einen Faktor M:

1. M hat Typ I, falls es eine minimale Projektion in M gibt.
2. M hat Typ II, falls es endliche Projektionen ungleich 0 aber keine minimalen Projektionen in M gibt. Ist zusätzlich $1_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ endlich, so hat M Typ II_1, ansonsten Typ II_∞.
3. M hat Typ III, falls es keine endlichen Projektionen ungleich 0 in M gibt.

Insbesondere ist ein Faktor immer entweder Typ I, II_1, II_∞ oder III.

Bemerkung 1.21 Ein weiteres Resultat – auf welches wir nicht weiter eingehen werden – zeigt, dass sich jede separable Von-Neumann-Algebra als direktes Integral von Faktoren schreiben lässt [18, Vol. 1, IV 8.21]. Damit wird klar, dass Faktoren und ihre Klassifikation im Zentrum der Theorie stehen, vgl. [18, Vol. 3, XIV §0 Introduction].

1.3 Typ II Faktoren

Im Folgenden werden wir uns mit Typ II Faktoren beschäftigen, da diese später wesentlich für die Definition des Jones-Index werden. Typ I und III Faktoren haben für die hier behandelte Theorie keine große Relevanz. Die Klassifikation der Typ I Faktoren gestaltet sich als relativ einfach und in [2], [9], [18] finden sich mehr Informationen dazu.

Die wohl wichtigsten Erkenntnisse in diesem Abschnitt sind die Existenz eines treuen, ultraschwach stetigen, eindeutigen Spurzustands auf einem II_1 Faktor und dass sich II_1 Faktoren genau darüber charakterisieren lassen. Dann werden wir sehen, dass auf II_∞ Faktoren ebenfalls eine Spur existiert, über die wir später den Index definieren werden. Wir orientieren uns wieder an Takesaki [18], Kadison [9] und Jones [5]. Nützlich sind auch Anantharaman [1] und Blackadar [2].

Definition 1.22 Sei M eine Von-Neumann-Algebra.

1. Ein Zustand ist ein positives lineares Funktional ϕ auf M mit $\phi(1) = 1$.
2. Eine (numerische) Spur auf M ist eine Abbildung $\tau : M_+ \to [0, \infty]$ mit
   (a) $\tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y),\ x, y \in M_+$,
   (b) $\tau(\lambda x) = \lambda\tau(x), \lambda \geq 0,\ x \in M_+$,
   (c) $\tau(x^*x) = \tau(xx^*),\ x \in M$.
3. τ heißt *treu*, falls $\tau(x^*x) = 0 \implies x = 0$
4. τ heißt *endlich*, falls $\tau(1) < \infty$
5. τ heißt *semifinit*, falls für jedes $0 \neq x \in M_+$ ein $0 \neq y \in M_+$ existiert mit $y \leq x$ und $\tau(y) < \infty$
6. τ heißt *normal*, falls $\tau(\sup_i x_i) = \sup_i \tau(x_i)$ für jedes monoton wachsende, beschränkte Netz $\{x_i\}_i \subset M_+$[a].
7. Ein Spurzustand ist ein Zustand ϕ sodass $\phi|_{M_+}$ eine (endliche) Spur ist.

[a] die Definition geht analog auch für positive Abbildungen

Wegen 1.6 lässt sich eine endliche Spur zu einem positiven linearen Funktional auf ganz M fortsetzen.

Bemerkung 1.23 Ebenso folgt mit 1.6, dass ein positives lineares Funktional ϕ auf selbstadjungierten Elementen nur reelle Werte annimmt und damit automatisch gilt: $\phi(x^*) = \phi(a - ib) = \overline{\phi(a + ib)} = \overline{\phi(x)}\quad \forall x = a + ib \in M,\ a = a^*,\ b = b^*$.

Am Rande sei angemerkt, dass positive lineare Abbildungen $\phi : M \to \mathbb{C}$ automatisch stetig sind. Dazu reicht es wieder, die Beschränktheit für positive Elemente nachzurechnen: Wäre ϕ nicht stetig, so wählt man $x_n \geq 0$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\phi(x_n) \geq 4^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x = \sum_n 2^{-n} x_n \in M$ und da ϕ positiv ist $\phi(x) \geq 2^{-n}\phi(x_n) \geq 2^n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ – ein Widerspruch zur Wohldefiniertheit von ϕ. Ferner gilt $\|\phi\| = \phi(1)$, siehe [2, II.6.2.5].

Die folgenden Propositionen bringen noch die Eigenschaft normal[4] mit Stetigkeit in Zusammenhang.

Proposition 1.24 Für ein stetiges lineares Funktional ϕ auf M sind äquivalent:

1. ϕ ultraschwach stetig.
2. ϕ ultrasstark stetig.
3. ϕ schwach stetig auf $B_1(M)$.
4. ϕ stark stetig auf $B_1(M)$.
5. ϕ normal.

Proposition 1.25 Sei $\phi : M \to N$ eine vollständig positive Abbildung (insbesondere alle *-Homomorphismen) zwischen Von-Neumann-Algebren. Dann sind äquivalent:

1. ϕ normal.
2. ϕ stetig bezüglich den ultraschwachen Topologien auf M und N.
3. ϕ stetig bezüglich den ultrastarken Topologien auf M und N.
4. $\phi|_{B_1(M)}$ stetig bezüglich den ultrastarken Topologien auf $B_1(M)$ und N.

[4] ein lineares Funktional ϕ heißt normal, falls $\phi(\sup_i x_i) = \lim_i \phi(x_i)$ für jedes monoton wachsende, beschränkte Netz $(x_i)_i \subseteq M_+$

Auch wenn einige Implikationen trivial sind, wird an dieser Stelle für die Beweise auf [2, III.2.1.4, III.2.2.2] verwiesen. Obwohl wir im Folgenden nicht explizit alle äquivalenten Aussagen benötigen werden, sind sie der Vollständigkeit halber dennoch aufgeführt.

1.3.1 II_1 Faktoren

Zunächst zeigen wir, dass Spuren auf II_1 Faktoren automatisch schöne Eigenschaften haben.

Proposition 1.26 Sei N ein ultraschwach abgeschlossenes Linksideal einer Von-Neumann-Algebra M. Dann existiert eine eindeutige Projektion $p \in M$ mit $N = Mp$. Falls N ein zweiseitiges Ideal ist, so gilt $p \in Z(M)$.

Beweis: Da N ultraschwach abgeschlossen ist und die Involution $\cdot^* : M \to M$ ultraschwach stetig ist, ist auch N^* ultraschwach abgeschlossen.
$N \cap N^* \subseteq M$ ist damit eine ultraschwach abgeschlossene *-Unteralgebra und besitzt eine eindeutige größte Projektion $\bigvee_{q \in P} q := p \in N \cap N^*,\ P := \{q \in N \cap N^* : q = q^2 = q^*\}$. Da N ein Linksideal ist mit $p \in N$ folgt $Mp \subseteq N$.
Für $x \in N$ betrachte man die Polarzerlegung $x = u|x|$. Wegen $|x| = u^*x$ und $x \in N$ gilt $|x| = |x|^* \in N \cap N^*$. Mit $|x| = |x|p$ sieht man $x = u|x| = u|x|p \in Mp$ und so $Mp = N$.

Ist N ein zweiseitiges Ideal so haben wir für unitäres $u \in M$: $N = Nu^* = Mpu^* = Mupu^*$, da $M = Mu$. Wegen der Eindeutigkeit von p folgt $p = upu^*$, also $p \in Z(M)$ nach 1.6. $\square$

Insbesondere folgt aus 1.26, dass ein Faktor M keine ultraschwach abgeschlossenen zweiseitigen Ideale ungleich $0, M$ hat.

Lemma 1.27 Eine ultraschwach stetige endliche Spur $\tau \neq 0$ auf einem Faktor M ist treu.

Beweis: Definiere $N := \{m \in M : \tau(m^*m) = 0\}$ und sei $a \in M$ sowie $x \in N$.
Wegen $0 \leq \|a\|^2 1 - a^*a$ gilt $0 \leq x^*(\|a\|^2 1 - a^*a)x$, also $x^*a^*ax \leq \|a\|^2 x^*x$. Dann erhält man mit der Positivität von τ auch $\tau(x^*a^*ax) \leq \|a\|^2 \tau(x^*x) = 0$, also ist N ein Linksideal.
Mit der Spureigenschaft $\tau(ab) = \tau(ba)$ folgt $N = N^*$ und somit auch, dass N zweiseitiges Ideal ist: $x \in N, a \in M,\ \tau(a^*x^*xa) = \tau(xaa^*x^*) = 0 \implies xa \in N$.

Um zu sehen, dass N ultraschwach abgeschlossen ist, nutzen wir die Cauchy-Schwarz Ungleichung für die positiv semidefinite, hermitesche Sesquilinearform $\langle x, y \rangle_\tau := \tau(y^*x)$: Aus $\tau(x^*x) = 0$ folgt damit $|\tau(xy)|^2 \leq \tau(xx^*)\tau(y^*y) = 0,\ \forall y \in M$. Also gilt $\tau(x^*x) = 0 \iff \tau(xy) = 0,\ \forall y \in M$. Nach Annahme sind die Funktionale $x \mapsto \tau(xy)$ ultraschwach stetig und $N = \bigcap_{y \in M} \ker(\tau(\cdot\ y))$ ist damit ultraschwach abgeschlossen. Mit Proposition 1.26 gilt $N = Mp$ für eine zentrale Projektion p. Aber mit $\tau \neq 0$ ist $N \neq M$ – also $p = 0$, da M ein Faktor ist. $\square$

Das zentrale Resultat ist nun:

Satz 1.28 Für einen Faktor M sind äquivalent:

1. M ist endlich.
2. Auf M existiert ein Spurzustand.

Solch ein Spurzustand ist automatisch normal.

Der Beweis ist technisch und hiermit sei auf die ausführlichen Standardwerke zum Thema verwiesen, wie etwa Takesaki [18, Vol. I, V 2.5, 2.6]. Damit erhalten wir eine äquivalente, äußerst nützliche Charakterisierung eines II_1 Faktors:

Korollar 1.29 Ein II_1 Faktor ist ein unendlich dimensionaler Faktor M, auf dem ein Spurzustand τ_M existiert. τ_M ist automatisch ultraschwach stetig, treu und eindeutig (siehe 1.32).

Korollar 1.30 Sei M ein II_1 Faktor und $0 \neq p \in M$ eine Projektion. Dann ist auch pMp auf $p\mathcal{H}$ ein II_1 Faktor.

Beweis: Nach 1.8 ist pMp ein Faktor. Sei τ_M der Spurzustand auf M. Durch $\tau_{pMp} \coloneqq \frac{\tau_M}{\tau_M(p)}$ wird ein Spurzustand auf pMp definiert. pMp ist unendlich dimensional, da eine minimale Projektion $pap \in pMp$ auch minimal in M wäre: Sei $q \in M$ mit $q \leq pap$. Dann gilt auch $pqp \leq pap$ und damit $pqp = pap \vee pqp = 0$. Im ersten Fall erhalten wir $pqp = pap \implies pqpap = pappap \implies pq = pap \implies q = pap$, wobei wir $q \leq pap$ angewendet haben. Analog sieht man im zweiten Fall $q = 0$. Da M nach Annahme keine minimalen Projektionen hat, gibt es in pMp ebenfalls keine. Somit ist pMp unendlich dimensional und damit ein II_1 Faktor nach 1.29. □

Wir möchten noch sehen, dass τ_M auf einem II_1 Faktor eindeutig bestimmt ist.

Proposition 1.31 Sei M ein II_1 Faktor. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $1 = \sum_{i=1}^{2^n} p_i$ in paarweise orthogonale Projektionen, sodass $\tau(p_i) = 2^{-n}$ für jeden Spurzustand τ auf M.

Beweis: Dies ist ein einfaches Korollar aus 1.17: Da M keine abelschen Projektionen ungleich 0 besitzt (siehe auch 1.16), ergibt wiederholtes Anwenden von 1.17 eine Zerlegung $1 = \sum_{i=1}^{2^n} p_i$ mit paarweise orthogonalen und äquivalenten p_i. Damit gilt $\tau_M(p_i) = 2^{-n}$. □

Korollar 1.32 Ein Spurzustand auf einem II_1 Faktor M ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir zeigen, dass je zwei Spurzustände auf den Projektionen übereinstimmen. Da deren Spann normdicht in M ist, folgt die Aussage. Sei $1 \neq q \in \mathscr{P}_M$ und zerlege mit 1.31 $1 = \sum_{i=1}^{2^n} p_i$ in paarweise orthogonale Projektionen. Wegen 1.13 folgt

$$\exists!\ k \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{k} p_i \preceq q \preceq \sum_{i=1}^{k+1} p_i.$$

Mit der vorherigen Proposition folgt jetzt

$$\frac{k}{2^n} \leq \tau(q) \leq \frac{k+1}{2^n}.$$

So wird der Wert von $\tau(q)$ beliebig genau angenähert und zwei Spurzustände müssen übereinstimmen. □

Korollar 1.33 Sei M ein II_1 Faktor mit (normalem) Spurzustand τ_M. Dann definiert τ_M einen Isomorphismus zwischen der Menge der Äquivalenzklassen von Projektionen und dem Intervall $[0, 1]$.

Beweis: Schreibe zunächst $(0,1) \ni t = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i 2^{-i},\ b_i \in \{0,1\}$. Konstruiere induktiv wie in 1.31 für $(n_i)_{i\in\mathcal{I}} := \{n \in \mathbb{N} : b_n = 1\} \subset \mathbb{N}$ eine Familie orthogonaler Projektionen $p_{n_i}, p_{n_2}, \dots$ mit $\tau(p_{n_i}) = 2^{n_i}$. Da τ normal ist, folgt $\tau(\sum_{i\in\mathcal{I}} p_{n_i}) = t$ und wegen der Orthogonalität ist $\sum_{i\in\mathcal{I}} p_{n_i}$ eine Projektion. Weiter ist $\tau(0) = 0$ und $\tau(1) = 1$ klar.

Mit der Spureigenschaft folgt sofort $p \sim q \implies \tau(p) = \tau(q)$. Weiter ergibt 1.13, dass auf zwei unterschiedlichen Äquivalenzklassen die Spur verschieden ist: Gilt $p \nsim q$, so gilt o.B.d.A. $p \sim p' < q$. Also auch $\tau(p) = \tau(p') < \tau(q)$. □

Wir werden noch kurz die Standarddarstellung eines II_1 Faktors betrachten, da diese später relevant wird. Sei dazu M ein II_1 Faktor mit Spurzustand τ. M wirkt kanonisch auf der GNS Konstruktion $(L^2(M), \pi_\tau, \Omega)$ durch $x(\xi\Omega) \mapsto (x\xi)\Omega$. Aufgrund der Normalität von τ ist $\pi_\tau(M)$ SOT abgeschlossen. Gleich werden wir sehen, dass $M' \subset \mathcal{B}(L^2(M))$ automatisch zu einem II_1 Faktor wird.

Satz 1.34 Mit der antilinearen Involution

$$J : L^2(M) \to L^2(M),\ x\Omega \mapsto x^*\Omega$$

gilt $\langle Js, Jt\rangle = \langle t, s\rangle\ \forall s,t \in L^2(M),\ Jk\Omega = k^*\Omega$ für $k \in M' \subset \mathcal{B}(L^2(M))$ und $JMJ = M' \subset \mathcal{B}(L^2(M))$.

Beweis: $\langle Js, Jt\rangle = \langle t, s\rangle$ prüft man leicht für die dichte Menge $M\Omega \subseteq L^2(M)$, indem man $x \in M$ in Real- und Imaginärteil aufspaltet und $x\Omega = (a+ib)\Omega$ schreibt. Daraus folgt sofort für $k \in M'$ und $y \in M$

$$\langle Jk\Omega, y\Omega\rangle = \langle y^*\Omega, k\Omega\rangle = \langle k^*y^*\Omega, \Omega\rangle = \langle y^*k^*\Omega, \Omega\rangle = \langle k^*\Omega, y\Omega\rangle$$

und so $Jk\Omega = k^*\Omega$. Die Inklusion $JMJ \subseteq M'$ zeigt man durch einfache Rechnung. Für $x \in M'$ folgt mithilfe des Bikommutantensatzes und

$$yJxJ\Omega = yx^*\Omega = Jxy^*\Omega = JxJy\Omega,\ y \in M'$$

$JxJ \in M$, da Ω separierend ist (τ ist treu). Also gilt $x \in JMJ$. □

Damit kann man unmittelbar folgern, dass $\tau(x) = \langle x\Omega, \Omega\rangle$ auch für $M' \subset \mathcal{B}(L^2(M))$ ein Spurzustand ist:

$$\tau(xy) = \langle xy\Omega, \Omega\rangle = \langle Jy^*\Omega, Jx\Omega\rangle = \langle x\Omega, y^*\Omega\rangle = \tau(yx),\ x, y \in M'.$$

1.3.2 II_∞ Faktoren

In diesem Abschnitt werden noch kurz II_∞ Faktoren betrachtet, da diese später in 3.2 und so für die Definition des Index relevant werden. Dennoch spielen sie für uns eine eher untergeordnete Rolle, weshalb die folgenden Resultate nur zitiert werden sollen.

Lemma 1.35 Für einen II_∞ Faktor M gilt $M \cong N \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$, wobei N ein II_1 Faktor ist und $\dim \mathcal{H} = \infty$.

Dieses Resultat findet sich unter anderem bei Kadison [9, 6.7.10]. Ein Beweis der nächsten Proposition ist bei Jones [5, 9.1.8] zu finden.

Proposition 1.36 Sei M ein unendlicher Faktor und $p \in \mathscr{P}_M$, so dass pMp ein II_1 Faktor ist. Dann ist M ein II_∞ Faktor.

Wir konstruieren eine Spur auf einem II_∞ Faktor $M = N \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit II_1 Faktor N. Dazu sei zunächst bemerkt, dass auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ durch

$$\mathrm{Tr}(a) := \sum_{i \in I} \langle ae_i, e_i \rangle$$

eine semifinite Spur gegeben ist, wobei $(e_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ ist. $\mathrm{Tr}(a)$ ist unabhängig von der Wahl der $(e_i)_{i \in I}$ ([1, 8.3.1]). Es ist klar, dass aus $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ auch $\mathrm{Tr}(1) = \infty$ folgt. Eine Normierung wie auf einem II_1 Faktor ist also nicht gegeben. Allerdings ist klar, dass $\mathrm{Tr}(p) = 1$ für jede Projektion p mit Rang 1 gilt.

Die Abbildung $\mathrm{tr} := \tau_N \otimes \mathrm{Tr}$ erfüllt dann die Spureigenschaft auf $N \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und ist normal. Als Analogon zu 1.33 erhält man:

Satz 1.37 Sei M ein II_∞ Faktor auf einem separablen Hilbertraum mit Spur tr. Dann definiert tr einen Isomorphismus von der Menge der Äquivalenzklassen von Projektion in M auf das Intervall $[0, \infty]$.

Für den Beweis und weitere Eigenschaften von tr sei auf [5, 9.1.9f] verwiesen. An dieser Stelle möchten wir einige Notationen vereinbaren. Im Folgenden bezeichnet

1. Tr die oben definierte (nicht normierte) Spur auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$,
2. tr sowohl die normierte Spur $\mathrm{tr} := \frac{1}{d}\mathrm{Tr}$ auf den Matrixalgebren $M_d(\mathbb{C})$ $d \in \mathbb{N}$ als auch die semifinite Spur auf einem II_∞ Faktor mit $\mathrm{tr}(p) = 1$ für jede Projektion p mit Rang 1,
3. τ den Spurzustand auf einem II_1 Faktor.

2 Konstruktion von Faktoren

In diesem Abschnitt werden Standard-Möglichkeiten zur Erzeugung von nichttrivialen Von-Neumann-Algebren vorgestellt. Insbesondere lassen sich damit II_1 Faktoren erzeugen.

2.1 Die induzierte Von-Neumann-Algebra einer Gruppe

Für eine Gruppe Γ definieren wir zunächst den Hilbertraum

$$\ell^2(\Gamma) := \left\{ f : \Gamma \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^2 < \infty \right\} \quad \text{mit} \quad \langle f, h \rangle_{\ell^2(\Gamma)} := \sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{f(\gamma)} h(\gamma).$$

Wir betrachten nun die linksreguläre Darstellung der Gruppenalgebra

$$\mathbb{C}\Gamma := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{C}, g_i \in \Gamma \right\}$$

auf $\ell^2(\Gamma)$:

$$\lambda : \mathbb{C}\Gamma \to \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma)),\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_{\gamma_i} \text{ wobei } (u_\gamma f)(g) := f(\gamma^{-1}g).$$

Jetzt ist $\mathrm{vN}(\Gamma) := \overline{\lambda(\mathbb{C}\Gamma)}^{SOT}$ die Gruppen-Von-Neumann-Algebra von Γ. Wegen $\langle f, u_\gamma h\rangle = \sum_{g\in\Gamma} \overline{f(g)}h(\gamma^{-1}g) = \sum_{g\in\Gamma} \overline{f(\gamma g)}h(g) = \langle u_{\gamma^{-1}} f, h\rangle$ und $u_g u_h = u_{gh}$ ist jedes u_γ unitär. Ein Standardbeispiel in endlicher Dimension ist das Folgende:

Beispiel 2.1 Sei $\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle g\rangle$ und g ein Erzeuger. Elemente in $\mathbb{C}\Gamma$ haben dann die Form $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i g^i$. Mit der kanonischen Basis $(\delta_e, \delta_{g^1}, \dots, \delta_{g^{n-1}})$ von $\ell^2(\Gamma)$ ergibt sich

$$\lambda(g^k)(\delta_{g^j}) = \delta_{g^{k+j}}$$

In Bezug zur festgelegten Basis hat $\lambda(g^k)$ die Form einer Matrix, wobei alle Einträge 0 sind bis auf eine "um k Stellen nach rechts versetzte Diagonale mit 1". Für $n = 5$ gilt beispielsweise

$$\lambda(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der Endlichdimensionalität erzeugt diese Matrix bereits die ganze Algebra $\lambda(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \lambda(\mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]) \subset \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$.

Das nächste Lemma klärt wann $\mathrm{vN}(\Gamma)$ ein II_1 Faktor ist.

Lemma 2.2 Falls Γ eine ICC Gruppe[a] ist, so ist $\mathrm{vN}(\Gamma)$ ein II_1 Faktor.

[a] von *infinite conjugacy classes*: $\forall\ e \neq h \in \Gamma : |\{ghg^{-1} \mid g \in \Gamma\}| = \infty$

Beweis: Sei e das neutrale Element in Γ. Wir bemerken, dass durch $\tau(f) := \langle f\delta_e, \delta_e\rangle$ wegen $\tau(u_g u_h) = \langle u_{gh}, \delta_e\rangle = \langle u_{hg}, \delta_e\rangle = \tau(u_h u_g)$ ein Spurzustand auf $\mathrm{vN}(\Gamma)$ definiert wird. Ist Γ eine ICC Gruppe, so ist $|\Gamma| = \infty$ und $\mathrm{vN}(\Gamma)$ automatisch unendlichdimensional, denn die u_g sind linear unabhängig. Sei $x = \sum_{g\in\Gamma} \lambda_g u_g \in Z(\mathrm{vN}(\Gamma))$. Dann folgt mit

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda_\gamma \delta_\gamma = x\delta_e = (u_g x u_{g^{-1}})\delta_e = \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda_\gamma u_{g\gamma g^{-1}}\Big)\delta_e = \sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda_\gamma \delta_{g\gamma g^{-1}},$$

dass $x\delta_e$ konstant auf jeder Konjugationsklasse ist. Ist Γ nun ICC, so folgt aus der Quadratsummierbarkeit von $x\delta_e \in \ell^2(\Gamma)$ schon $x\delta_e = \lambda\delta_e$ also $x = \lambda 1$. $\square$

Einfache Beispiele für ICC Gruppen sind die unendliche symmetrische Gruppe $S_\infty = \varinjlim S_n$ und die freien Gruppen F_n für $n \geq 2$, wie man leicht überprüfen kann.

2.2 Unendliche Tensorprodukte

Sei zunächst $\{(\mathcal{H}_i, \xi_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von Hilberträumen $\mathcal{H}_i$ mit ausgezeichnetem Einheitsvektor $\xi_i \in \mathcal{H}_i$. Für endliches $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{I}$ sei $\bigodot_{i\in\mathcal{E}} \mathcal{H}_i$ das (nicht vervollständigte) Tensorprodukt der $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in\mathcal{E}}$. Für $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{I},\ |\mathcal{G}| < \infty$ ist mit den Einbettungen

$$\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}} : \bigodot_{i\in\mathcal{F}} \mathcal{H}_i \to \bigodot_{i\in\mathcal{G}} \mathcal{H}_i,\ \bigotimes_{i\in\mathcal{F}} h_i \mapsto \bigotimes_{i\in\mathcal{F}} h_i \otimes \Big(\bigotimes_{i\in\mathcal{G}\setminus\mathcal{F}} \xi_i\Big)$$

ein induktives System $\{(\bigodot_{i\in\mathcal{F}}\mathcal{H}_i, \Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}})\}_{\mathcal{F}\subseteq\mathcal{G}\in\{\mathcal{E}\in\mathcal{I}\ |\ |\mathcal{E}|<\infty\}}$ gegeben. Das Tensorprodukt $\bigotimes_{i\in\mathcal{I}}(H_i,\xi_i)$ ist die Vervollständigung des direkten Limes bezüglich des induzierten Skalarproduktes. Die ξ_i induzieren den Einheitsvektor $\bigotimes_{i\in\mathcal{I}}\xi_i$.
Eine Von-Neumann-Algebra $M_i\subseteq\mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ lässt sich durch

$$\rho_i : M_i \to \mathcal{B}(\otimes_{i\in\mathcal{I}}(H_i,\xi_i)),\ S\mapsto \bigotimes_{j\neq i} 1_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_j)}\otimes S$$

in $\mathcal{B}(\bigotimes_{i\in\mathcal{I}}(H_i,\xi_i))$ einbetten und das Tensorprodukt ist definiert als

$$\bigotimes_{i\in\mathcal{I}}(M_i,\xi_i) \coloneqq \{\rho_i(M_i)\mid i\in\mathcal{I}\}''.$$

Bemerkung 2.3 Wählt man normale Zustände φ_i auf M_i, so ergibt die GNS Konstruktion von M_i eine Darstellung $(\pi_{\varphi_i},\mathcal{H}_{\varphi_i},\Omega_{\varphi_i})$ und wir definieren das Tensorprodukt bezüglich der φ_i als

$$\bigotimes_{i\in\mathcal{I}} M_i \coloneqq \bigotimes_{i\in\mathcal{I}}(M_i,\varphi_i) \coloneqq \bigotimes_{i\in\mathcal{I}}(\pi_{\varphi_i}(M_i),\Omega_{\varphi_i}).$$

Den ausgezeichneten Vektorzustand, der aus $\bigotimes_{i\in\mathcal{I}}\Omega_{\varphi_i}$ hervorgeht, notieren wir mit $\bigotimes_{i\in\mathcal{I}}\varphi_i$. In diesem Fall wird also die nicht kanonische Wahl der Einheitsvektoren im Vorfeld eliminiert.

Für $\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ mit dem Spurzustand wird das Tensorprodukt besonders einfach:

Beispiel 2.4 Für $i\in\mathbb{N}$ sei $M_i = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ und $\varphi_i = \mathrm{tr} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}$ die normalisierte Spur. Dann gilt $L^2(\mathrm{M}_2(\mathbb{C})) = \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ und der ausgezeichnete Einheitsvektor ist $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. So erhält man das induktive System $(\bigodot_{n=1}^{i}\mathrm{M}_2(\mathbb{C}),\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit den Einbettungen

$$\varphi_i\Big(\bigotimes_{n=1}^{i} a_n\Big) \coloneqq \bigotimes_{n=1}^{i} a_n\otimes 1_2.$$

Ein Element von $\varinjlim \bigodot_{n=1}^{i} L^2(\mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$ hat die Form $\bigotimes_{i\in\mathbb{N}} a_i$, sodass für alle bis auf endlich viele a_i gilt: $a_i = 1_2$ (Siehe z.B. [11, 5.2.16] für die Konstruktion des direkten Limes in **Set**). Nun wirkt $\mathcal{R}\coloneqq\bigotimes_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ per Definition auf der Vervollständigung. Der nächste Satz zeigt, dass $\mathcal{R}$ ein Faktor ist und da $\mathcal{R}$ unendlichdimensional mit Spurzustand $\bigotimes_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{tr}$ ist, ist $\mathcal{R}$ ein II_1 Faktor.

Murray und von Neumann zeigten in [13, Vol. IV], dass alle separablen hyperfiniten[5] II_1 Faktoren isomorph sind. Deshalb bezeichnet man $\mathcal{R}$ als *den* hyperfiniten II_1 Faktor.

Satz 2.5 Wenn M_i ein Faktor mit normalem Zustand φ_i ist für alle $i\in\mathcal{I}$, so ist auch $\bigotimes_{i\in\mathcal{I}}(M_i,\varphi_i)$ ein Faktor.

Für endliche Tensorprodukte lässt sich die Aussage durch geschicktes Argumentieren mit Kommutanten zeigen. Der unendliche Fall wird darauf zurückgeführt [2, III.3.1.3]. Auf eine Ausführung verzichten wir, da an dieser Stelle noch keine bedingten Erwartungen – welche im Beweis Verwendung finden – eingeführt wurden.

[5]eine Von-Neumann-Algebra M heißt hyperfinit falls eine gerichtete Menge von Von-Neumann-Algebren $(M_i)_{i\in\mathcal{I}}$ existiert, sodass $\bigcup_i M_i$ ultraschwach dicht in M ist.

3 Der Jones-Index

Im Jahr 1983 veröffentlichte Vaughan Jones in [6] sein einflussreiches Resultat über die möglichen Werte der nach ihm benannten Konjugationsinvariante $[M : N] = \dim_N(L^2(M, \tau_M))$ für II_1 Faktoren $N \subseteq M$. Seine Arbeit ergab das überraschende Resultat, dass neben dem kontinuierlichen Anteil $[4, \infty]$ die Indexwerte im Intervall $[1, 4)$ diskret liegen: $\{4\cos^2(\frac{\pi}{n}) : n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$ ist die Menge der möglichen Werte kleiner 4 und jede Zahl daraus wird als Index angenommen.

Während er sich mit dieser Theorie beschäftigte, entdeckte Jones nebenbei einen Zusammenhang zur Knotentheorie und eine ebenfalls nach ihm benannte Knoteninvariante [7]. Ihm wurde unter anderem für diese Ergebnisse im Jahr 1990 die Fields-Medaille zugesprochen.

3.1 M-Moduln und ihre Dimension

Definition 3.1 Sei M ein II_1 Faktor. Ein M-Modul ist ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit einem surjektiven, ultraschwach stetigen, unitalen *-Homomorphismus von M auf einen II_1 Faktor $N \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Für die dadurch induzierte Wirkung von M auf $\mathcal{H}$ schreiben wir $x\xi$ für $x \in M$ und $\xi \in \mathcal{H}$.

Tatsächlich ist die ultraschwache Stetigkeit automatisch erfüllt: Sei $\pi : M \twoheadrightarrow N$ die Darstellung von $\mathcal{H}$. Dann ist $\tau_N \circ \pi$ ein Spurzustand auf M. Wegen der Eindeutigkeit gilt $\tau_M = \tau_N \circ \pi$. Weiter folgt mit der automatischen Treue der Spur auf M (siehe 1.29) und der Tatsache, dass π ein *-Homomorphismus ist die Injektivität von π:

$$\pi(a)\pi(a)^* = \pi(a^*a) = 0 \implies \tau_M(a^*a) = \tau_N(\pi(a^*a)) = 0 \overset{\tau_M \text{ treu}}{\implies} a = 0.$$

Damit wird π ein Verbandisomorphismus zwischen den vollständigen Verbänden M_+ und N_+:

Wegen der Ordnungserhaltung von π gilt für $(a_i)_i \subseteq M_+$: $\pi(\bigwedge a_i) \leq \pi(a_i)\ \forall\ i$. Sei $b \leq \pi(a_i)\ \forall\ i$. Aufgrund der Surjektivität von π existiert $c \in M$ mit $\pi(c) = b$. Weiter gilt für jedes i mit

$$0 \leq \pi(a_i) - \pi(c) = \pi(a_i - c)$$

auch $a_i - c \in M_+$ (π^{-1} ist auch ein *-Isomorphismus). Damit erhält man $c \leq \bigwedge a_i$. Abschließend bekommen wir also $b = \pi(c) \leq \pi(\bigwedge a_i)$. Damit ist gezeigt, dass π Infima erhält. Ähnlich zeigt man, dass das Gleiche für Suprema gilt. Da M durch M_+ linear aufgespannt wird, ist π automatisch normal und nach 1.25 als *-Homomorphismus auch ultraschwach stetig.

Zentral wird das nächste Ergebnis (siehe auch Jones [5] und Speicher [16]).

Satz 3.2 Sei M ein II_1 Faktor und $\mathcal{H}$ ein separabler M-Modul.
a) Es existiert eine M-lineare[a] Isometrie $u : \mathcal{H} \to L^2(M) \otimes \ell^2(\mathbb{N}) = \ell^2(L^2(M))$.
b) Für eine M-lineare Isometrie $u : \mathcal{H} \to L^2(M) \otimes \ell^2(\mathbb{N})$ gilt $uu^* \in (M \otimes 1)'$ und

tr(uu^*) ist unabhängig von u.[b]

[a] M-linear meint $ux = (x \otimes 1)u$

[b] $\mathrm{tr} = \tau \otimes \mathrm{Tr}$ ist die Spur auf dem II_∞ Faktor $(M \otimes 1)' = M' \otimes \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$

Beweis: **a)** Betrachte den M-Modul $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus (L^2(M) \otimes \ell^2(\mathbb{N}))$ zusammen mit der endlichen Projektion $p = id \oplus 0 \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ und der unendlichen Projektion $q = 0 \oplus id \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$[6]. Natürlich gilt $p, q \in M'$ auf $\mathcal{K}$. Dabei ist M' auf $\mathcal{K}$ unendlich, weil q eine unendliche Projektion ist. Wählt man eine Projektion e in $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ mit Rang 1, so gilt $(0 \oplus (1 \otimes e))M'(0 \oplus (1 \otimes e)) \cong M'$ auf $L^2(M)$. Da M' auf $L^2(M)$ – wie M – ein II_1 Faktor ist, folgt mit 1.36, dass M' auf $\mathcal{K}$ ein II_∞ Faktor ist. Damit gilt nach 1.37 $p = v^*v \sim vv^* \leq q$ für eine partielle Isometrie $v \in M'$, denn $tr(p) < \infty = tr(q) \implies p \preceq q$. Wir stellen v als Matrix dar:

$$v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}) = \begin{pmatrix} \mathcal{B}(\mathcal{H}) & \mathcal{B}(L^2(M) \otimes \ell^2(\mathbb{N}), \mathcal{H}) \\ \mathcal{B}(\mathcal{H}, L^2(M) \otimes \ell^2(\mathbb{N})) & \mathcal{B}(L^2(M) \otimes \ell^2(\mathbb{N})) \end{pmatrix}$$

Wegen $v^*v = p$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^*a + c^*c & a^*b + c^*d \\ b^*a + d^*c & b^*b + d^*d \end{pmatrix} \implies b = d = 0.$$

Weiter gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = q \geq vv^* = \begin{pmatrix} aa^* + bb^* & ac^* + bd^* \\ ca^* + db^* & cc^* + dd^* \end{pmatrix}$$

und so $\langle (aa^* + bb^*)\xi, \xi \rangle = \langle (q - vv^*)(\xi \oplus 0), \xi \oplus 0 \rangle \geq 0$. Also folgt auch $a = 0$ und

$$v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man die Gleichungen mit der Tatsache $a = b = d = 0$ erneut, so gilt $c^*c = 1$ und $cc^* \leq 1$. Es bleibt zu zeigen, dass die Isometrie $u := c : \mathcal{H} \to L^2(M) \otimes \ell^2(\mathbb{N})$ M-linear ist. Als Matrix dargestellt wirkt $x \in M$ wie $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & x \otimes 1 \end{smallmatrix}\right)$ auf $\mathcal{K}$. Wegen $v \in M'$ auf $\mathcal{K}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \otimes 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \otimes 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}$$

und so $ux = (x \otimes 1)u \ \forall \ x \in M$.

b) Sei $w : \mathcal{H} \to L^2(M) \otimes \ell^2(\mathbb{N})$ eine M-lineare Isometrie. Dann gilt für $x = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & x \otimes 1 \end{smallmatrix}\right) \in M$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \otimes 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ wx & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (x \otimes 1)w & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \otimes 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}$$

also $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M'$. Mit $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{smallmatrix}\right)^* = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ww^* \end{smallmatrix}\right) \in M'$ ist auch $ww^* \in (M \otimes 1)'$. Analog erhält man für eine weitere M-lineare Isometrie $\overline{w}$ auch $w\overline{w}^*, \ \overline{w}w^* \in (M \otimes 1)'$. Damit folgt mit der Spureigenschaft $\mathrm{tr}(ww^*) = \mathrm{tr}(w\overline{w}^*\overline{w}w^*) = \mathrm{tr}(\overline{w}w^*w\overline{w}^*) = \mathrm{tr}(\overline{w}\overline{w}^*)$. □

Definition 3.3 Sei M ein II_1 Faktor und $\mathcal{H}$ ein M-Modul. Die Kopplungskonstante oder M-Dimension von $\mathcal{H}$ ist definiert als $\dim_M(\mathcal{H}) := \mathrm{tr}(uu^*) \in [0, \infty]$, wobei u die M-lineare Isometrie aus 3.2 ist.

[6] $q = 0 \oplus u^*u$, wobei u der Shiftoperator ist

Bemerkung 3.4 3.2 besagt auch, dass M auf separablem $\mathcal{H}$ unitär äquivalent zu M auf $uu^*(L^2(M) \otimes l^2(\mathbb{N}))$ ist. Die Spureigenschaft zusammen mit 1.37 ergibt $\dim_M(\mathcal{H}) = \dim_M(\mathcal{K}) \iff M$ auf $\mathcal{H}$ und M auf $\mathcal{K}$ sind unitär äquivalent. Mit der Charakterisierung von Typ II Faktoren anhand der Spur stellt man so ebenfalls fest, dass M' auf $\mathcal{H}$ ein II_1 Faktor ist, genau dann wenn $\dim_M(\mathcal{H}) < \infty$. Ansonsten ist M' ein II_∞ Faktor. (siehe z.B. Jones [8]).

Mit dem folgenden Lemma stellt man leicht fest, dass ein beliebiger Wert in $[0, \infty]$ als Dimension konstruiert werden kann, indem man direkte Summen der GNS Konstruktion nimmt und diese mit Projektionen $p \in M'$ zuschneidet. Wir führen nachfolgend Jones und Sunder aus [5], [8]. Im Beweis bezeichnet J die Involution aus 1.34.

Lemma 3.5 Sei M ein II_1 Faktor und $\mathcal{H}$ ein M-Modul.
a) Für eine Projektion $p' \in M' \subset \mathcal{B}(L^2(M))$ gilt $\dim_M(p'L^2(M)) = \tau_{M'}(p')$.
b) Für M-Moduln $(\mathcal{H}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt $\dim_M(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \dim_M(\mathcal{H}_i)$.
c) Für $0 \neq p \in \mathscr{P}_M$ gilt $\dim_{pMp}(p\mathcal{H}) = \tau_M(p)^{-1} \dim_M(\mathcal{H})$.

Sei nun zusätzlich M' ein II_1 Faktor auf $\mathcal{H}$, also $\dim_M(\mathcal{H}) < \infty$.
d) Für eine Projektion $0 \neq p' \in M' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt $\dim_{Mp'}(p'\mathcal{H}) = \tau_{M'}(p') \dim_M(\mathcal{H})$.
e) $\dim_M(\mathcal{H}) = (\dim_{M'}(\mathcal{H}))^{-1}$.

Beweis: **a)** Wähle den Einheitsvektor $e_1 = (1, 0, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N})$ und sei $u : p'L^2(M) \to L^2(M) \otimes \ell^2(\mathbb{N})$ definiert durch $u(p'x\Omega) = p'x\Omega \otimes e_1$. Dann gilt $uu^* = p' \otimes \langle e_1, \cdot \rangle e_1$. Also gilt $\mathrm{tr}(uu^*) = (\tau \otimes \mathrm{Tr})(uu^*) = \tau(p') \cdot \mathrm{Tr}(\langle e_1, \cdot\rangle e_1) = \tau(p')$, da $\mathrm{Tr}(q) = 1$ für Projektionen q mit Rang 1.
b) Wähle für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine M-lineare Isometrie $u_i : \mathcal{H} \to L^2(M) \otimes \ell^2(\mathbb{N})$. Nach Annahme betrachten wir nur abzählbar viele Moduln. Deshalb können wir mit einem Diagonalargument die u_i so mit Isometrien verknüpfen, dass ihre Bilder orthogonal sind (o.B.d.A. haben die u_i also paarweise orthogonale Bilder). Dann ist $u = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i$ eine Isometrie und es gilt $\mathrm{tr}(uu^*) = \mathrm{tr}(\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i u_i^*) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{tr}(u_i u_i^*)$.
c) Wir zeigen die Aussage für $\mathcal{H} = JqJL^2(M)$ mit $\mathscr{P}_M \ni q \leq p$. Bemerke $JqJ \in M'$. Wegen $JqJpx\Omega = pxJqpJ\Omega = pxpq\Omega = JqJpxp\Omega$ sind pMp auf $JqJpL^2(M)$ und pMp auf $JqJL^2(pMp)$ unitär äquivalent. Dann gilt mit a)

$$\begin{aligned}\dim_{pMp}(pJqJL^2(M)) &= \dim_{pMp}(JqJL^2(pMp)) = \tau_{JpMpJ}(JqJ) \\ &= \tau_{pMp}(q) = \tau_M(p)^{-1}\tau_M(q) = \tau_M(p)^{-1} \dim_M(JqJL^2(M)).\end{aligned}$$

Wegen 3.4, a) und b) ist beliebiges $\mathcal{H}$ unitär äquivalent zu einer abzählbaren direkten Summe von $Jq_iJL^2(M)$ mit $q_i \leq p$, da die M-Moduln $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} Jq_iJL^2(M)$ beliebige Werte aus $[0, \infty]$ annehmen können. Mit b) folgt dann die Aussage.
d) Wähle $k \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathscr{P}_{M_k(M)} \subset \mathcal{B}(\bigoplus_{i=1}^k L^2(M))$ mit $\tau_{M_k(M)}(q) = \dim_M(\mathcal{H})k^{-1} \in [0, 1]$ (siehe auch 1.33 und beachte $\dim_M(\mathcal{H}) < \infty$). Mit 3.4 können wir direkt $\mathcal{H} = q' \bigoplus_{i=1}^k L^2(M)$ annehmen, wobei

$$q' := J^{\oplus k} q J^{\oplus k} \in J^{\oplus k} M_k(M) J^{\oplus k} = M_k(M') = (M \otimes 1_k)'.$$

Bemerke, dass die kanonische Wirkung von M auf $\bigoplus_{i=1}^k L^2(M)$ eben die von $M \otimes 1_k$ ist. Nun ist $q'(M \otimes 1_k)'q' = q'J^{\oplus k} M_k(M) J^{\oplus k} q' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \ni p' \in q'(M \otimes 1_k)'q'$. Zusammen mit $p'\mathcal{H} = p' \bigoplus_{i=1}^k L^2(M)$ erhält man dann

$$\dim_M(p'\mathcal{H}) = \dim_M\Big(p' \bigoplus_{i=1}^k L^2(M)\Big) = k\tau_{J^{\oplus k} M_k(M) J^{\oplus k}}(p').$$

Abschließend gilt damit für M' ($\cong q'(M' \otimes 1_k)q'$) $\subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$\tau_{M'}(p') = \tau_{q'J^{\oplus k}M_k(M)J^{\oplus k}q'}(p') = \frac{\tau_{J^{\oplus k}M_k(M)J^{\oplus k}}(p')}{\tau_{J^{\oplus k}M_k(M)J^{\oplus k}}(q')} = \frac{k^{-1}\dim_M(p'\mathcal{H})}{k^{-1}\dim_M(\mathcal{H})}.$$

e) Es gilt $\dim_M(L^2(M)) = \dim_{M'}(L^2(M)) = 1$. Für $\mathcal{H} = L^2(M)$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt mit b) $\dim_M\big(\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{H}\big) = k$. Weiter ist mit der Projektion $e_{11} \in M_k(M) \subset \mathcal{B}(\bigoplus_i^k \mathcal{H})$ auf den ersten Summanden der direkten Summe, sowie $E_{11} \coloneqq J^{\oplus k}e_{11}J^{\oplus k}$, c), $\tau_{M_k(M)'}(E_{11}) = k^{-1}$ und $\mathcal{B}(\bigoplus_i^k \mathcal{H}) \supset J^{\oplus k}M_k(M)J^{\oplus k} = (M \otimes 1_k)' = M_k(M')$ auch

$$k\dim_{M'}(\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{H}) = \dim_{E_{11}M_k(M')E_{11}}(E_{11}\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{H}) = \dim_{M'}(\mathcal{H}) = 1.$$

Ein beliebiger M-Modul $\mathcal{H}$ ist wegen der Annahme $\dim_M(\mathcal{H}) < \infty$ unitär äquivalent zu $q'\bigoplus_{i=1}^k L^2(M)$ für geeignetes $k \in \mathbb{N}$ und $q' \in \mathcal{B}(\bigoplus_{i=1}^k L^2(M))$ (siehe d)). Ähnliche Rechnung wie bei d) zeigt dann die Aussage. $\square$

3.2 Der Index

Definition 3.6 **a)** Sei M ein II_1 Faktor. Ein II_1 Faktor $N \subseteq M$ heißt Unterfaktor.
b) Für II_1 Faktoren $N \subseteq M$ heißt $[M : N] \coloneqq \dim_N(L^2(M))$ Jones-Index.
c) Gilt $N' \cap M = \mathbb{C}1$, so heißt $N \subseteq M$ irreduzibel.

Die Eindeutigkeit der Spur impliziert sofort $\tau_N = \tau_M|_N$. Weil $N \subseteq M$ kanonisch auf $L^2(M)$ wirkt und $L^2(M) = L^2(N) \oplus L^2(N)^\perp$ folgt $\dim_N(L^2(M)) = \dim_N(L^2(N)) + \dim_N(L^2(N)^\perp) \geq 1$ mit $[M : N] = 1 \iff N = M$, denn die Äquivalenzklasse der Projektion 0 ist einelementig.
Ferner wird anhand der Definition ersichtlich, dass für unitäres $u : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ und $N \subseteq M$ auf $\mathcal{H}$ gilt $[M : N] = [uMu^* : uNu^*]$. Dazu reicht es die unitäre Äquivalenz von M auf $L^2(M)$ und uMu^* auf $L^2(uMu^*)$ einzusehen sowie die daraus entspringende Gleichheit $\dim_M(\mathcal{H}) = \dim_{uMu^*}(\mathcal{K})$.

Name und Notation des Index lassen sich leicht rechtfertigen, wenn man induzierte Gruppenalgebren betrachtet.

Beispiel 3.7 Seien $H \leq G$ ICC Gruppen. Dann wirkt $\mathrm{vN}(H)$ auf $\ell^2(G)$. Für $g \in G$ erhalten wir die unitäre Abbildung $u_g : \ell^2(H) \to \ell^2(gH)$, $(u_g f)(\cdot) = f(g^{-1}\cdot)$. Da die Menge der Nebenklassen $\{gH : g \in G\}$ eine Partition von G bildet folgt

$$\dim_{\mathrm{vN}(H)}(\ell^2(G)) = \dim_{\mathrm{vN}(H)}\left(\bigoplus_{i=1}^{[G:H]} \ell^2(H)\right) = [G : H].$$

Wir haben hierbei ausgenutzt, dass mit $u : \ell^2(G) \to L^2(\mathrm{vN}(G))$, $\sum \alpha_\gamma\delta_\gamma \mapsto \sum \alpha_\gamma u_\gamma$ die unitäre Äquivalenz von $\mathrm{vN}(H)$ auf $\ell^2(G)$ und $\mathrm{vN}(H)$ auf $L^2(\mathrm{vN}(\Gamma))$ induziert wird. Bettet man nun kanonisch $\mathrm{vN}(H)$ in $\mathrm{vN}(G)$ als Unterfaktor ein, so erhält man

$$[\mathrm{vN}(G) : \mathrm{vN}(H)] = \dim_{\mathrm{vN}(H)}(L^2(\mathrm{vN}(G))) = \dim_{\mathrm{vN}(H)}(\ell^2(G)) = [G : H].$$

Mit den Eigenschaften von $\dim_M(\mathcal{H})$ lassen sich sofort Aussagen über $[M : N]$ treffen.

Proposition 3.8 Wirken II_1 Faktoren $N \subseteq M$ auf $\{0\} \neq \mathcal{H}$ mit $\dim_N(\mathcal{H}) < \infty$, so gilt
$$[M : N] = \frac{\dim_N(\mathcal{H})}{\dim_M(\mathcal{H})}.$$

Beweis: Durch Bilden einer endlichen Summe $\bigoplus_{i=0}^k \mathcal{H}$ können wir $\dim_M(\mathcal{H}) \geq 1$ annehmen. Wie in 3.4 erwähnt impliziert $\dim_N(\mathcal{H}) < \infty$, dass N' ein II_1 Faktor ist. Ebenso ist wegen $M' \subseteq N'$ auch M' ein II_1 Faktor. Nach 1.33 wählen wir eine Projektion $p \in M'$ mit $\tau_{M'}(p) = (\dim_M(\mathcal{H}))^{-1}$. Wegen $\dim_M(p\mathcal{H}) = \tau_{M'}(p)\dim_M(\mathcal{H}) = 1$ gilt $p\mathcal{H} \cong L^2(M)$ und
$$[M : N] = \dim_N(L^2(M)) = \dim_N(p\mathcal{H}) = \tau_{N'}(p)\dim_N(\mathcal{H}) = \frac{\dim_N(\mathcal{H})}{\dim_M(\mathcal{H})}.$$
□

Zusammen mit 3.5 liefert diese Proposition sofort durch elementare Rechnung im Körper $\mathbb{R}$:

Korollar 3.9 Seien $N \subseteq M$ II_1 Faktoren mit $[M : N] < \infty$.
a) Für $0 \neq p \in \mathscr{P}_N$ gilt $[pMp : pNp] = [M : N]$.
b) Für $0 \neq q \in \mathscr{P}_{M'}$ gilt $[Mq : Nq] = [M : N]$.
c) Für $0 \neq p \in \mathscr{P}_{N' \cap M}$ gilt $[pMp : Np] = \tau_M(p) \cdot \tau_{N'}(p) \cdot [M : N]$.
d) Es gilt $[M : N] = [N' : M']$.
e) Für II_1 Faktoren $N \subseteq P \subseteq M$ gilt $[M : N] = [M : P] \cdot [P : N]$.

Wir definieren für $0 \neq p \in \mathscr{P}_{N' \cap M}$ den *lokalen Index* $[M : N]_p := [pMp : Np]$.

Lemma 3.10 Seien $N \subseteq M$ II_1 Faktoren mit $[M : N] < \infty$. Für eine Partition $1 = \sum_{i \in I} p_i$ mit $0 \neq p_i \in \mathscr{P}_{N' \cap M},\ p_i \perp p_j$ gilt
$$[M : N] = \sum_{i \in I} \frac{[M : N]_{p_i}}{\tau_M(p_i)} \geq \sum_{i \in I} \frac{1}{\tau_M(p_i)}.$$

Beweis: Mit Teil c) des vorherigen Korollars und $\sum_{i \in I} \tau_{N'}(p_i) = \tau_{N'}(\sum_{i \in I} p_i) = 1$ sowie $[M : N] \geq 1$ gilt
$$[M : N] = \sum_{i \in I} \tau_{N'}(p_i)[M : N] = \sum_{i \in I} \frac{[M : N]_{p_i}}{\tau_M(p_i)} \geq \sum_{i \in I} \frac{1}{\tau_M(p_i)}.$$
□

Betrachtet man II_1 Faktoren $N \subseteq M$, sodass N nicht irreduzibel in M ist (also $N' \cap M \neq \mathbb{C}1$), so existiert $0, 1 \neq p \in \mathscr{P}_{N' \cap M}$. Mit $1 = p + (1 - p)$ und 3.10 gilt
$$[M : N] \geq \frac{1}{\tau_M(p)} + \frac{1}{1 - \tau_M(p)} \geq 4.$$

Wir haben genutzt, dass für $x \in (0, 1)$ gilt: $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \geq 4$. (Ein leichtes Analysis I Argument genügt dafür.)
Die Kontraposition des soeben Gezeigten ist: $[M : N] \leq 4 \implies N \subseteq M$ irreduzibel.

Für eine Partition $(p_i)_{i=1}^k$ von 1 in $N' \cap M$ erhält man ferner

$$[M:N] \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\tau_M(p_i)} \geq \sum_{i=1}^{k} k = k^2,$$

denn ein einfaches Analysis II Argument zeigt, dass die Summe $\sum_{i=1}^k a_i^{-1}$ unter der Bedingung $\sum_{i=1}^k a_i = 1$ mit $a_i = k^{-1}\ \forall\ i$ minimiert wird.
Damit sieht man $d := \dim(N' \cap M) \leq [M : N]$. Denn für $d = \infty$ existiert eine unendliche Partition $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von 1 und es folgt sofort $[M : N] \geq \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$. So folgt aus $[M : N] < \infty$ auch $d < \infty$ und $N' \cap M = \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{C})$ (siehe z.B. [18]). Also existiert eine Partition von 1 der Größe $\sum_{i=1}^k n_i$ in $N' \cap M$ und damit gilt

$$[M:N] \geq \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{k} n_i^2 = d = \dim(N' \cap M).$$

3.3 Satz von Jones

An dieser Stelle möchten wir uns von Jones bedeutendem Ergebnis überzeugen, dass die Menge der möglichen Indexwerte kleiner 4 (genau) $\{4\cos^2(\frac{\pi}{n}) : n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$ ist. Dabei orientieren wir uns an Jones [5], [6] sowie Speicher [16].

Die zentrale Konstruktion im Beweis ist ein "Turm" aus II_1 Faktoren, der aus den II_1 Faktoren $N \subseteq M$ entspringt.

Definition 3.11 (Jones II_1 Faktorturm) Gegeben II_1 Faktoren $N \subseteq M$ definiere zunächst $M_0 := N$ und $M_1 := M$ und dann

$$M_{i+1} := \langle M_i, e_i \rangle := (M_i \cup \{e_i\})'' \subset \mathcal{B}(L^2(M_i)),\ i \in \mathbb{N}$$

wobei $e_i = \mathcal{P}_{L^2(M_{i-1})} \in \mathscr{P}_{L^2(M_i)}$ die orthogonale Projektion von $L^2(M_i)$ auf $L^2(M_{i-1})$ ist.

Das Erzeugen von M_1 aus $N \subseteq M$ wird auch als Standardkonstruktion (*basic construction*) bezeichnet. Wiederholtes Anwenden der Standardkonstruktion ausgehend von $N \subseteq M$ erzeugt natürlich genau den Turm.

Im Folgenden sei $e := e_1 = \mathcal{P}_{L^2(N)}$ die Projektion aus 3.11. Wir möchten die Standardkonstruktion genauer betrachten – dazu nutzen wir die Existenz einer bedingten Erwartung:

Definition und Satz 3.12 (Umegaki) Seien $N \subseteq M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Von-Neumann-Algebren. Eine bedingte Erwartung $E : M \to N$ ist eine positive lineare Abbildung mit

1. $E(n) = n,\ \forall\ n \in N,$
2. $E(asb) = aE(s)b,\ \forall\ s \in M,\ a, b \in N.$

Seien $N \subseteq M$ II_1 Faktoren mit Spurzustand $\tau = \tau_M$. Dann existiert genau eine bedingte Erwartung $E : M \to N$ mit $\tau \circ E = \tau$. Ferner wird diese festgelegt durch $E(x)e = exe,\ \forall\ x \in M.$

Wir verweisen an dieser Stelle auf [16, Satz 5.2] für den Beweis.

Bemerkung 3.13 Da τ treu ist, folgt unmittelbar mit $\tau \circ E = \tau$ auch die Treue von E. Weiter ist klar, dass E für $N \subseteq M$ auf $L^2(M)$ aufgrund der Eindeutigkeit durch die Einschränkung von e auf $M \cong \hat{M} \subset L^2(M)$ gegeben ist. Äquivalent dazu ist $ex - x \perp L^2(N)$ für $x \in M$. Also ist $E(x) \in N$ wegen Dichtheit eindeutig bestimmt durch

$$\tau((E(x) - x)y) = 0, \ \forall\, y \in N.$$

Im Folgenden bezeichnet J die antilineare Involution aus 1.34.

Proposition 3.14 Für die Standardkonstruktion $N \subseteq M \subseteq M_2 \subset \mathcal{B}(L^2(M))$ gilt

1. $\forall\, x \in M : ex = xe \iff x \in N$,
2. $N' = (M' \cup \{e\})'' \subset \mathcal{B}(L^2(M))$,
3. $JeJ = e$, $M_2 = JN'J$ und $M + MeM \subset M_2$ ist WOT dichte *-Unteralgebra,
4. $[M : N] < \infty \iff M_2$ ist II_1 Faktor. In diesem Fall ist $[M_2 : M] = [M : N]$,
5. $\tau_{M_2}(e) = \tau_{N'}(e) = [M : N]^{-1}$.

Beweis:

1. Es gelte $ex = xe$. Dann ergibt $E(x)e = exe = xe$ und $e\Omega = \Omega$

   $$(E(x) - x)\Omega = (E(x) - x)e\Omega = 0.$$

   Da Ω separierend für M ist folgt $E(x) = x \in N$.

   Für $x \in N$ gilt $xe = E(x)e = exe$ und $x^*e = E(x^*)e = ex^*e$. So auch

   $$ex = (ex^*e)^* = exe = xe.$$

2. $M = M''$ zusammen mit 1. liefert $N = M \cap \{e\}' = (M' \cup \{e\})' \subset \mathcal{B}(L^2(M))$.
3. Wir zeigen $JeJ = e$. Man berechnet elementar für $x \in M$:

   $$\begin{aligned} JeJx\Omega = Jex^*\Omega = Jex^*e\Omega = JE(x^*)\Omega = JE(x)^*\Omega \\ = E(x)\Omega = E(x)e\Omega = exe\Omega = ex\Omega. \end{aligned}$$

   (Dabei gilt $E(x^*) = E(x)^*$ nach 1.23.) Mit $M = JM'J$ folgt die Aussage nun aus 2. Wegen $(aeb)(ced) = aE(bc)ed \in MeM$ ist $M + MeM$ abgeschlossen unter Multiplikation. Die WOT Dichtheit von $M + MeM$ folgt aus $M \cup \{e\} \subset M + MeM$.
4. Nach 3.4 ist $[M : N] < \infty$ äquivalent dazu, dass N' ein II_1 Faktor auf $L^2(M)$ ist, also mit 3. auch dazu, dass $M_2 = JN'J$ ein II_1 Faktor ist. Ferner gilt in diesem Fall mit $\mathcal{H} = L^2(M)$ in 3.8 und 3.5 e)

   $$[M_2 : M] = \frac{1}{\dim_{M_2}(L^2(M))} = \frac{1}{\dim_{JN'J}(L^2(M))} = \frac{1}{\dim_{N'}(L^2(M))} = [M : N].$$

   Die vorletzte Gleichheit folgt aus der Konjugationsinvarianz.
5. Nach 1. gilt $e \in N' \cap M_2$ und die WOT Dichtheit von $M + MeM$ aus 3. impliziert $eM_2e = Ne$. Zusammen mit $[M_2 : N] = [M : N]^2$ aufgrund von 4. erhalten wir

   $$1 = [eM_2e : Ne] = \tau_{M_2}(e)\tau_{N'}(e)[M_2 : N] = \tau_{M_2}(e)\tau_{N'}(e)[M : N]^2.$$

   Dabei haben wir 3.9 angewendet. Wieder mit 3. und der Tatsache, dass J unitär ist gilt $\tau_{M_2}(e) = \tau_{JN'J}(JeJ) = \tau_{N'}(e)$. Abschließend folgt aus der Positivität von $\tau_{M_2}(e)$: $\tau_{M_2}(e) = [M : N]$. $\square$

Wir schreiben ab sofort $\lambda := [M : N]^{-1}$. Das Ziel ist nun bestimmte Relationen für die Projektionen aus 3.11 zu zeigen, die es erlauben werden die *Jones-Wenzl* Projektionen $f_n := 1 - e_1 \vee \cdots \vee e_n$ in rekursive Abhängigkeit zu bringen und $\tau(f_n) = P_n(\lambda)$ zu schreiben. Geschicktes Argumentieren mit den Nullstellen der P_i ergibt dann das finale Resultat.

Proposition 3.15 e_1, e_2 aus 3.11 erfüllen folgende Relationen:
1. Für $x \in M : \tau_{M_2}(xe_1) = \lambda\tau_M(x)$,
2. $E_M(e_1) = \lambda 1$ für die spurerhaltende bedingte Erwartung $E_M : M_2 \to M$,
3. $e_1e_2e_1 = \lambda e_1,\ e_2e_1e_2 = \lambda e_2$.

Beweis:
1. Für $x, y \in N$ gilt mit $e \in N'$: $\tau_{M_2}(xye_1) = \tau_{M_2}(yxe_1)$. Also ist $\tau_{M_2}(\cdot\ e_1)$ eine Spur auf N. Diese ist eindeutig bis auf Normierung, also gilt $\tau_{M_2}(\cdot\ e_1) = c\tau_N(\cdot)$. Ferner gilt $c = c\tau_N(1) = \tau_{M_2}(e_1) = \lambda$ nach 3.14.
   Die Aussage folgt nun aus $\tau_{M_2}(xe_1) = \tau_{M_2}(e_1xe_1) = \tau_{M_2}(E(x)e_1) = \lambda\tau_N(E(x)) = \lambda\tau_M(x)$, da E die Spur erhält (siehe 3.12).
2. Mit 1. folgt für $x \in M$:
   $$\tau_{M_2}((\lambda - e_1)x) = \lambda\tau_{M_2}(x) - \tau_{M_2}(e_1x) = \lambda\tau_{M_2}(x) - \lambda\tau_M(x) = 0,$$
   denn aufgrund der Eindeutigkeit des Spurzustands gilt $\tau_{M_2}(x) = \tau_M(x)$. Die Aussage folgt mit 3.13.
3. Die Charakterisierung der bedingten Erwartung impliziert $e_2e_1e_2 = E_M(e_1)e_2 = \lambda e_2$. Nach 3.14 3. reicht es die Gleichheit auf $(M + Me_1M)\Omega \subset L^2(M_2)$ zu prüfen[7]. Angewendet auf $x\Omega$ erhalten wir mit 2. und den Eigenschaften der bedingten Erwartung
   $$e_1e_2e_1x\Omega = e_1e_2e_1xe_2\Omega = e_1E_M(e_1x)e_2\Omega = e_1\lambda xe_2\Omega = \lambda e_1x\Omega.$$
   Auf $ye_1z\Omega$ gilt ähnlich
   $$\begin{aligned} e_1e_2e_1ye_1z\Omega &= e_1e_2e_1ye_1ze_2\Omega = e_1E_M(e_1ye_1z)e_2\Omega \\ &= e_1E_M(E_N(y)e_1)ze_2\Omega = e_1E_N(y)\lambda ze_2\Omega = \lambda e_1ye_1z\Omega \end{aligned}$$
   Hierbei gilt $E_M(E_N(y)e_1) = E_N(y)E_M(e_1)$ weil $E_N(y) \in N \subseteq M$ ist. □

Die gezeigten Resultate der Standardkonstruktion übertragen sich natürlich sofort auf den gesamten Turm aus II_1 Faktoren:

Korollar 3.16 Für die $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus 3.11 gelten die Relationen
1. $e_i^2 = e_i$,
2. $|i - j| \geq 2 \implies e_ie_j = e_je_i$,
3. $e_ie_{i\pm1}e_i = \lambda e_i$.

Beweis: 1. ist klar, da alle e_i Projektionen sind. Wegen $e_i \in M'_{i-2}$ nach 3.14 und $e_{i-k} \in M_{i-k} \subseteq M_{i-2},\ \forall\ k \geq 2$ ist 2. klar. 3. folgt direkt aus 3.15. □

Tatsächlich spielen Tschebyschow Polynome eine wichtige Rolle und mit verwandten Polynomen werden in 3.18 die Jones-Wenzl Projektionen rekursiv in Verbindung gebracht:

[7] für einen II_1 Faktor $B \subset \mathcal{B}(L^2(B))$ ist eine WOT dichte *-Unteralgebra $A \subseteq B$ natürlich auch SOT dicht, daher kann jeder Vektor $b\Omega \in L^2(B)$ durch $(a_i\Omega)_i \subset L^2(A)$ in Norm approximiert werden: $\lim_i \|a_i\Omega\| = \|b\Omega\|$.

Definition 3.17 Die durch

$$U_0(x) := 1,\ U_1(x) := 2x,\ U_{n+1}(x) := 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

definierten Polynome heißen Tschebyschow Polynome zweiter Art.
Definiere ferner für $n \in \mathbb{N}_0$

$$P_n(x) := x^{\frac{n}{2}} U_n(\frac{1}{2\sqrt{x}}).$$

Dabei erhält man durch elementare Rechnung die Vorschrift

$$P_0 = P_1 = 1,\ P_{n+1}(x) = P_n(x) - xP_{n-1}(x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Substitution von $x = \cos(\theta)$ ergibt[8] für die Tschebyschow Polynome

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)},\ \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

Damit ist klar, dass $P_n((4\cos^2(\frac{k\pi}{n+1}))^{-1}) = 0$ gilt für $0 < k < n+1$.

Satz 3.18 Für die Jones-Wenzl Projektionen $f_n = 1 - e_1 \vee \cdots \vee e_n$ gilt

1. $P_{n+1}(\lambda) \neq 0 \implies f_{n+1} = f_n - \frac{P_n(\lambda)}{P_{n+1}(\lambda)} f_n e_{n+1} f_n$,
2. $P_i(\lambda) \neq 0$ für $1 < i \leq n \implies \tau(f_n) = P_{n+1}(\lambda)$.

Beweis: 1. Wir berechnen für $n = 1$ und $f_1 \neq 0$:

$$f_1 - \frac{P_1(\lambda)}{P_2(\lambda)} f_1 e_2 f_1 = 1 - e_1 - \frac{1}{1-\lambda}(1-e_1)e_2(1-e_1) = 1 - \frac{e_1 + e_2 - e_1e_2 - e_2e_1}{1-\lambda}.$$

Nun folgt mit den oben gezeigten Relationen

$$\begin{aligned}(e_1 + e_2 - e_1e_2 - e_2e_1)^2 &= e_1 + e_1e_2 - e_1e_2 - \lambda e_1 + e_2e_1 + e_2 - \lambda e_2 - e_2e_1 \\ &\quad - \lambda e_1 - e_1e_2 + \lambda e_1e_2 + \lambda e_1 - e_2e_1 - \lambda e_2 + \lambda e_2 + \lambda e_2e_1 \\ &= (1-\lambda)(e_1 + e_2 - e_1e_2 - e_2e_1)\end{aligned}$$

womit $p := \frac{e_1+e_2-e_1e_2-e_2e_1}{1-\lambda}$ eine Projektion ist. Mit $e_1(e_1 \vee e_2) = e_1$ und $e_2(e_1 \vee e_2) = e_2$ folgt weiter $p \leq e_1 \vee e_2$. Zuletzt gilt noch $pe_1 = (1-\lambda)^{-1}(e_1 + e_2e_1 - \lambda e_1 - e_2e_1) = e_1$ also $p \geq e_1$ und analog $p \geq e_2$. Damit ist gezeigt: $p = e_1 \vee e_2$ und $1 - p = f_2$.

Die Aussage gelte jetzt für $n \geq 2$ und sei $f_n \neq 0$.

Es ist klar, dass $x := f_n - \frac{P_n(\lambda)}{P_{n+1}(\lambda)} f_n e_{n+1} f_n$ selbstadjungiert ist. $x^2 = x$ folgt durch leichtes Rechnen mit dem Fakt

$$\begin{aligned}e_{n+1}f_ne_{n+1} &= e_{n+1}f_{n-1}e_{n+1} - \frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} \underbrace{e_{n+1}f_{n-1}e_nf_{n-1}e_{n+1}}_{=f_{n-1}e_{n+1}e_ne_{n+1}f_{n-1}} \\ &= e_{n+1}f_{n-1} - \frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} \lambda e_{n+1}f_{n-1} = e_{n+1}f_{n-1}\frac{P_n(\lambda) - \lambda P_{n-1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} \\ &= e_{n+1}f_{n-1}\frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_n(\lambda)}\end{aligned} \tag{3.2}$$

[8] mit Induktion und der Formel $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

und $f_n \leq f_{n-1}$. Also ist x eine (orthogonale) Projektion. Die Definition von f_{n+1} liefert sofort $e_{n+1} \perp f_{n+1}$. Also mit $f_{n+1} \leq f_n$

$$xf_{n+1} = f_n f_{n+1} - \frac{P_n(\lambda)}{P_{n+1}(\lambda)} f_n e_{n+1} f_{n+1} = f_{n+1}$$

und so $f_{n+1} \leq x$. Mit Gleichung (3.2) sieht man ebenso

$$\begin{aligned} e_{n+1}x = e_{n+1}f_n - \frac{P_n(\lambda)}{P_{n+1}(\lambda)} e_{n+1}f_n e_{n+1} f_n &= e_{n+1}f_n - \frac{P_n(\lambda)}{P_{n+1}(\lambda)} \frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} e_{n+1} f_{n-1} f_n \\ &= e_{n+1}f_n - e_{n+1}f_n = 0. \end{aligned}$$

Abschließend gilt $e_i x = 0$ für $1 \leq i \leq n$, da natürlich $f_n e_i = 0$ für $1 \leq i \leq n$. Somit ist auch $x \leq f_{n+1} = (1 - e_1) \wedge \cdots \wedge (1 - e_{n+1})$.

2. Die Aussage ist für $n = 1$ klar. Mit 1. sowie 3.15 folgt dann per Induktion

$$\begin{aligned} \tau(f_n) &= \tau(f_{n-1}) - \frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} \tau(f_{n-1}e_n f_{n-1}) = \tau(f_{n-1}) - \frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} \lambda \tau(f_{n-1}) \\ &= P_n(\lambda) - \lambda P_{n-1}(\lambda) = \tau(f_{n-1}) \frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} = \tau(f_{n-2}) \frac{P_n(\lambda)}{P_{n-1}(\lambda)} \frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} \\ &= \cdots = \tau(f_1) \frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_2(\lambda)} = (1-\lambda) \frac{P_{n+1}(\lambda)}{1-\lambda} = P_{n+1}(\lambda). \end{aligned}$$

□

Zusammensetzen der bisherigen Resultate liefert das Ergebnis:

Satz 3.19 (Jones 1983) Seien $N \subseteq M$ II_1 Faktoren. Dann gilt

$$[M : N] < 4 \implies \exists\, n \in \mathbb{N}_{\geq 3} : [M : N] = 4\cos^2(\frac{\pi}{n}).$$

Beweis: Sei $n \geq 3$ und

$$[M : N]^{-1} = \lambda \in \left(\frac{1}{4\cos^2(\frac{\pi}{n+1})}, \frac{1}{4\cos^2(\frac{\pi}{n})} \right).$$

Dann existiert $\mu \in (1, \frac{n+1}{n})$, sodass $\lambda = (4\cos^2(\frac{\mu\pi}{n+1}))^{-1}$ und aus (3.1) folgt

$$P_n(\lambda) = \lambda^{\frac{n}{2}} U_n\left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right) = \lambda^{\frac{n}{2}} U_n\left(\cos\left(\frac{\mu\pi}{n+1}\right)\right) = \lambda^{\frac{n}{2}} \frac{\sin(\mu\pi)}{\sin(\frac{\mu\pi}{n+1})} < 0.$$

Analog sieht man für $1 \leq i \leq n-1$

$$P_i(\lambda) = \lambda^{\frac{n}{2}} \frac{\sin(\frac{(i+1)\mu}{n+1}\pi)}{\sin(\frac{\mu\pi}{n+1})} > 0,$$

denn $0 < \frac{(i+1)\mu}{n+1} < 1,\ 1 \leq i \leq n-1$. Nun gilt mit 3.18 aber $0 \leq \tau(f_{n-1}) = P_n(\lambda) < 0$. Mit diesem Widerspruch folgt, dass $\lambda^{-1} = [M : N]$ nicht als Index auftreten kann. □

In seinem Paper [6] ging Jones noch einen Schritt weiter und konstruierte für jeden möglichen Wert $4\cos^2(\frac{\pi}{n})$ einen Unterfaktor des hyperfiniten II_1 Faktors $\mathcal{R}$, welcher diesen Index hat. Diese Unterfaktoren sind irreduzibel wie oben bemerkt. Es lassen sich auf einfache Art (nicht irreduzible) Unterfaktoren mit $[\mathcal{R} : N] \geq 4$ finden:

Beispiel 3.20 Sei $0, 1 \neq p \in \mathcal{R}$ eine Projektion. Dann sind $p\mathcal{R}p$ sowie $(1-p)\mathcal{R}(1-p)$ ebenso hyperfinit und damit isomorph. Sei $\psi : p\mathcal{R}p \to (1-p)\mathcal{R}(1-p)$ ein Isomorphismus von Von-Neumann-Algebren. betrachte nun $N := \{x + \psi(x) | x \in p\mathcal{R}p\} \subset \mathcal{R}$. Dann gilt $p\mathcal{R}p = Np$ und $(1-p)\mathcal{R}(1-p) = N(1-p)$. Ferner gilt $p \in N' \cap \mathcal{R}$. Also gilt mit der Zerlegung nach 3.10

$$[\mathcal{R} : N] = \frac{1}{\tau_{\mathcal{R}}(p)} + \frac{1}{1 - \tau_{\mathcal{R}}(p)}.$$

Aufgrund von 1.33 exsitiert für alle $t \in (0,1)$ p mit $t = \tau_{\mathcal{R}}(p)$. Elementare Methoden der Analysis zeigen nun, dass so ein beliebiger Index auf $[4, \infty)$ angenommen wird.

Zusammen mit Jones Existenzresultat zeigt das, dass $\{4\cos^2(\frac{\pi}{n}) : n \in \mathbb{N}_{\geq 3}\} \cup [4, \infty]$ genau die Menge der möglichen Indexwerte ist und jeder Wert daraus als Index angenommen wird.

4 Yang-Baxter Unterfaktoren

Nach der eben beschriebenen allgemeinen Theorie wollen wir uns auf konkrete Faktoren konzentieren und ein paar Indizes berechnen. Wir lassen uns dazu Faktoren aus unitären Lösungen der Yang-Baxter Gleichung erzeugen.

Definition 4.1 Sei V ein Hilbertraum mit $d := \dim(V) < \infty$. Wir definieren für $R \in \mathrm{End}(V^{\otimes n}), n, i \in \mathbb{N}$

$$R_i := \underset{1}{1_V} \otimes \cdots \otimes \underset{i-1}{1_V} \otimes \underset{i,\ldots,i+n-1}{R} \otimes \underset{i+n}{1_V} \otimes \ldots \tag{4.1}$$

in $\mathcal{E} := \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{End}(V)$ (siehe auch 2.4). $R \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ heißt $\mathcal{R}$-Matrix, falls R unitär und die Yang-Baxter Gleichung

$$R_1 R_2 R_1 = R_2 R_1 R_2 \tag{YBE}$$

erfüllt ist.

Eine einfache Rechnung zeigt, dass der Tensorflip $F(v \otimes w) := w \otimes v$ eine Lösung von (YBE) in jeder Dimension ist. Das Lösen der Gleichung im Allgemeinen stellt sich als sehr kompliziert heraus und die Menge $\mathcal{R}(V)$ der $\mathcal{R}$-Matrizen auf V ist noch nicht gut verstanden. Allerdings gibt es Klassifikationsresultate für gewisse Klassen von Lösungen wie etwa den involutiven $\mathcal{R}$-Matrizen [10].

Kanonisch erhält man eine Abbildung von der Gruppenalgebra der unendlichen Zopfgruppe $B_\infty = \varinjlim B_n$ nach $\mathcal{E}$ mittels $\rho_R : \mathbb{C}B_\infty \to \mathcal{E},\ \sigma_i \mapsto R_i$.
Weiter gilt, dass $M_R := (\rho(\mathbb{C}B_\infty))'' \subset \mathcal{E}$ wie auch $1 \otimes M_R =: N_R \subset M_R$ hyperfinite Faktoren sind und II_1, falls $R \neq \pm 1$ [3, Proposition 2.8]. Damit stellt sich die Frage nach dem Wert von $[M_R : N_R]$.

4.1 Der involutive, multiplizitätsfreie Fall

Definition und Satz 4.2 a) Sei $(c_{ij})_{ij} \subset S^1 := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ und $(p_i)_{i=1}^N \subset \mathscr{P}_{\mathcal{B}(V)}$ eine Partition von 1_V. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{N} c_{ii} p_i \otimes p_i + F \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} c_{ij} p_i \otimes p_j \tag{NF1}$$

eine $\mathcal{R}$-Matrix in erster Normalform.

b) Für $A \in \mathrm{End}(V \otimes V),\ B \in \mathrm{End}(W \otimes W)$ sei $A \boxplus B \in \mathrm{End}((V \oplus W) \otimes (V \oplus W))$ definiert durch

$$A \boxplus B := A \oplus B \oplus F \text{ auf}$$
$$(V \oplus W) \otimes (V \oplus W) = (V \otimes V) \oplus (W \otimes W) \oplus ((V \otimes W) \oplus (W \otimes V)).$$

1_n sei im Folgenden die Identität auf $\mathbb{C}^{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist für $(c_i)_i \subset S^1$

$$c_1 1_{d_1} \boxplus \cdots \boxplus c_k 1_{d_k} \in \mathrm{End}(C^d \otimes C^d) \text{ mit } d = \sum_{i=1}^{k} d_i \tag{NF2}$$

eine $\mathcal{R}$-Matrix in zweiter Normalform.

Für die Beweise und Details wird auf [3], [10] verwiesen und wir bemerken, dass (NF1), falls $c_{ij} = 1 \ \forall i \neq j$ und $c_{ii} \in \{-1, 1\} \ \forall i$, und (NF2), falls $c_i \in \{-1, 1\} \ \forall i$, involutive $\mathcal{R}$-Matrizen beschreiben. In diesem Fall bezeichnen wir für $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_i \otimes p_i + F \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} p_i \otimes p_j \tag{NFI}$$

als involutive Normalform. Definiert man $d_i := \mathrm{Tr}(p_i)$, so gilt

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_i \otimes p_i + F \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} p_i \otimes p_j \sim \boxplus_{i=1}^{N} \varepsilon_i 1_{d_i}$$

mit der Äquivalenzrelation $\sim$ aus [10] aufgrund der Ähnlichkeit der partiellen Spuren. Owen Tanner zeigte, dass für involutive $\mathcal{R}$-Matrizen in (NFI) unter der Zusatzannahme $\varepsilon_i \mathrm{tr}(p_i) \neq \varepsilon_j \mathrm{tr}(p_j),\ \forall i \neq j$ gilt

$$[M_R : N_R] = \|\mathrm{ptr}(R)^{-1}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\beta_i}$$

mit $\|x\|_2 := \sqrt{\tau(x^* x)}$. Dabei bezeichnen die $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ die Thoma Parameter der involutiven $\mathcal{R}$-Matrix R [10] und $\mathrm{ptr} := 1 \otimes \mathrm{tr}$ die (rechte) partielle Spur. (Für $\mathcal{R}$-Matrizen stimmt diese mit der linken partiellen Spur $\mathrm{ptr}' := \mathrm{tr} \otimes 1$ überein [10].) Gilt die eben genannte Annahme, so sagen wir R ist multiplizitätsfrei, da dann die $\varepsilon_i \mathrm{tr}(p_i)$ genau den Eigenwerten von $\mathrm{ptr}(R)$ entsprechen.

Wir führen hier den Beweis, da Tanners Überlegungen nur skizzenhaft vorliegen.

Zur besseren Lesbarkeit werden wir im Folgenden häufig $X \in \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ mit X_1 (siehe (4.1)) identifizieren.

Für eine $\mathcal{R}$-Matrix R gilt nach [3] $\mathrm{ptr}(R) \in N_R' \cap M_R$. Ebenso hat man für die Spektralprojektionen $P_\lambda = E_\lambda^{\mathrm{ptr}(R)} \in N_R' \cap M_R$. Mit 3.10 folgt also

$$[M_R : N_R] = \sum_{\lambda \in \sigma(\mathrm{ptr}(R))} \frac{[M_R : N_R]_{P_\lambda}}{\tau(P_\lambda)}.$$

Gleich nutzen wir folgendes Resultat über Elemente der unendlichen symmetrischen Gruppe $S_\infty = \varinjlim S_n$. Wir definieren $S_\infty^{>1} := \{\sigma \in S_\infty \ : \ \sigma(1) = 1\}$.

Proposition 4.3 Sei $\sigma \in S_\infty$ mit $\sigma(1) \neq 1$. $\exists\ \sigma_1, \sigma_2 \in S_\infty^{>1}$ mit $\sigma = \sigma_1 (1\ 2) \sigma_2$.

Der Beweis wird als leichte Übung dem Leser überlassen. Damit erhalten wir:

Lemma 4.4 Für $p \in \mathscr{P}_{N_R' \cap M_R}$ gilt $[M_R : N_R]_p = 1 \iff pRp \in pN_R$.

Beweis: " $\Longrightarrow$ " ist klar, wegen $[pM_Rp : pN_R] = 1 \iff pM_Rp = pN_R$.
Für " $\Longleftarrow$ " zerlege $\sigma \in S_\infty$ mit $\sigma(1) \neq 1$ wie oben in $\sigma_1(1\ 2)\sigma_2$ mit $\sigma_1, \sigma_2 \in S_\infty^{>1}$. Dann ist wegen $p \in N_R' \cap M_R$, $\rho_R((1\ 2)) = R_1$ und $pR_1p \in pN_R$ auch

$$p\rho_R(\sigma)p = \rho_R(\sigma_1) pR_1p \rho_R(\sigma_2) \in pN_R.$$

Damit gilt $p\rho_R(\sigma)p \in pN_R\ \forall\ \sigma \in S_\infty$ und $pM_Rp = (p\rho(\mathbb{C}S_\infty)p)'' \subseteq (pN_R)'' = pN_R$. Also $pM_Rp = pN_R$ und $[M_R : N_R]_p = 1$. □

Proposition 4.5

$$\text{Für } R = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i p_i \otimes p_i + F \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N p_i \otimes p_j \text{ in (NFI) gilt } \mathrm{ptr}(R) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \mathrm{tr}(p_i) p_i.$$

Beweis: Wir zeigen $\mathrm{ptr}\big(F \sum_{i \neq j} p_i \otimes p_j\big) = 0$. Dann folgt die Aussage wegen der Linearität von ptr. Dafür wählen wir zunächst für eine beliebige Projektion $p \neq 0, 1$ eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i=1}^d$, welche die Zerlegung $1 = p + p^\perp$ respektiert und berechnen

$$\begin{aligned} \langle v, \mathrm{ptr}\big(F(p \otimes p^\perp)\big) v\rangle &= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \langle (v \otimes e_k), F(p \otimes p^\perp)(v \otimes e_k)\rangle \\ &= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \langle v, p^\perp e_k\rangle \langle e_k, pv\rangle = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \langle v, p^\perp e_k\rangle \langle pe_k, v\rangle = 0. \end{aligned}$$

Für die letzte Gleichheit wurde verwendet, dass mit unserer Wahl der Orthonormalbasis gilt: $pe_k = 0 \vee p^\perp e_k = 0\ \forall k$. Damit ist $\mathrm{ptr}\big(F(p \otimes p^\perp)\big) = 0$. Wegen $\sum_{i \neq j} p_i \otimes p_j = \sum_i p_i \otimes p_i^\perp$ und der Linearität von ptr folgt nun schon $\mathrm{ptr}\big(F \sum_{i \neq j} p_i \otimes p_j\big) = 0$. □

Satz 4.6 Falls $\varepsilon_i \mathrm{tr}(p_i) \neq \varepsilon_j \mathrm{tr}(p_j)$ für $j \neq i$ für

$$R = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_i \otimes p_i + F \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} p_i \otimes p_j \text{ in (NFI), so gilt } [M_R : N_R] = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mathrm{tr}(p_i)}.$$

Beweis: Wegen 4.5 und $\varepsilon_i \mathrm{tr}(p_i) \neq \varepsilon_j \mathrm{tr}(p_j)$ für $j \neq i$ sind die p_i genau die Spektralprojektionen von $\mathrm{ptr}(R)$. Damit gilt für jede Spektralprojektion $p_k = P_\lambda$ von $\mathrm{ptr}(R)$

$$\begin{aligned} p_k \Big(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_i \otimes p_i + F \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} p_i \otimes p_j \Big) p_k &= \varepsilon_k p_k \otimes p_k + \sum_{k \neq j=1}^{N} p_k F (p_k \otimes p_j) \\ &= \varepsilon_k p_k \otimes p_k \in p_k N_R, \end{aligned}$$

da $\big(\sum_{k\neq j=1}^{N} p_k F(p_k \otimes p_j)\big)(v \otimes w) = \sum_{k \neq j=1}^{N} p_k p_j w \otimes p_k v = 0$ und $1 \otimes p_k = 1 \otimes P_\lambda \in N_R$. Abschließend erhält man mit 4.4

$$[M_R : N_R] = \sum_{\lambda \in \sigma(\mathrm{ptr}(R))} \frac{[M_R : N_R]_{P_\lambda}}{\tau(P_\lambda)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{[M_R : N_R]_{p_i}}{\mathrm{tr}(p_i)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mathrm{tr}(p_i)}$$

was zu zeigen war. □

Mit den getroffenen Annahmen sind auch die Thoma Parameter (α, β) der $\mathcal{R}$-Matrix speziell (siehe [10, Satz 4.8]) und damit können wir im involutiven multiplizitätsfreien Fall

$$[M_R : N_R] = \|\mathrm{ptr}(R)^{-1}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\beta_i}$$

schreiben.

Man stellt fest, dass die Formel in weitaus mehr Fällen zu gelten scheint als unter den oben beschriebenen Annahmen. Bei nicht involutiven $\mathcal{R}$-Matrizen existieren keine Thoma Parameter und man muss sich auf $\|\mathrm{ptr}(R)^{-1}\|_2^2$ beschränken, jedoch ist in dieser Allgemeinheit nicht bekannt, ob $\mathrm{ptr}(R)$ invertierbar ist. Für involutives $R \in \mathcal{R}(V)$ ist die Existenz von $\mathrm{ptr}(R)^{-1}$ aber gesichert [10].

4.2 Temperley-Lieb $\mathcal{R}$-Matrizen

Definition 4.7 $R \in \mathcal{R}(V)$ ist vom Temperley-Lieb Typ $\alpha \in [0,1]$ bezüglich der Spektralprojektion $P = E^R_{\lambda_1}$, falls das Spektrum von R aus zwei Werten $\sigma_R = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ besteht und die Temperley-Lieb Relationen gelten:

1. $P_i^2 = P_i$
2. $|i - j| \geq 2 \implies P_i P_j = P_j P_i$
3. $P_i P_{i\pm1} P_i = \alpha P_i$

Wir bemerken, dass der Flip $F \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^2)$ vom Temperley-Lieb Typ $\frac{1}{4}$ ist, aber $F \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^3)$ nicht die nötigen Eigenschaften besitzt. Eine Rechnung zeigt, dass involutive Temperley-Lieb $\mathcal{R}$-Matrizen nur mit $\alpha = \frac{1}{4}$ existieren können (siehe auch [10]).

Bemerkung 4.8 Ein Wort aus den P_i lässt sich mit den Temperley-Lieb Relationen in folgender reduzierter Normalform schreiben:

$$(P_{i_1}P_{i_1-1}\dots P_{k_1})(P_{i_2}P_{i_2-1}\dots P_{k_2})\dots(P_{i_l}P_{i_l-1}\dots P_{k_l})$$

wobei $i_j \geq k_j$, $i_1 < i_2 < \dots < i_l$ und $k_1 < k_2 < \dots < k_l$. (Siehe z.B. [6].)

Im Folgenden wird die spurerhaltende bedingte Erwartung $E_{N_R} : M_R \to N_R$ besondere Bedeutung erhalten:

Proposition 4.9 Für die spurerhaltende bedingte Erwartung $E_{N_R} : M_R \to N_R$, $R \in \mathcal{R}(V)$ gilt

$$E_{N_R} = 1_V \cdot \mathrm{tr} \otimes 1_V \otimes 1_V \otimes \dots$$

Ein Beweis dazu findet sich in [3]. Wir benötigen noch folgendes Resultat aus [14, 1.2]

Proposition 4.10 Betrachte II_1 Faktoren $N \subset M$ mit endlichem Index und die Standardkonstruktion $M_2 = (\{e_1\} \cup M)''$ aus Jones Turm 3.11. Sei $\tilde{M}$ ein II_1 Faktor mit $M \subset \tilde{M}$ und Spurzustand $\tau_{\tilde{M}}$ sowie $e \in \tilde{M}$ eine Projektion. Dann sind äquivalent:

1. Es existiert ein Isomorphismus $\phi : M_2 \to \tilde{M}$ mit $\phi(x) = x,\ \forall\ x \in M$ und $\phi(e_1) = e$.
2. $exe = E_N(x)e,\ x \in M,\ e \neq 0$ und $\tilde{M} = (\{e\} \cup M)''$

Mit $\phi(a) \coloneqq 1 \otimes a$ notieren wir im Folgenden den Tensorshift $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. (YBE) impliziert sofort

$$\phi(X) = \operatorname*{s-lim}_n R_1^* R_2^* \dots R_n^* X R_n \dots R_2 R_1 \ \forall X \in M_R.$$

Siehe Gohm und Köstler [4] für die Existenz des SOT-Grenzwerts.

Lemma 4.11 Sei $R \in \mathcal{R}(V)$ und für das Spektrum σ_R gelte: $\lambda \in \sigma_R \implies -\lambda \notin \sigma_R$. Dann gilt $N_R' \cap M_R = \mathbb{C}1$ und insbesondere $\mathrm{ptr}(R) \in \mathbb{C}1$.

Beweis: Für $R \in \mathcal{R}(V)$ gilt natürlich $M_R = M_{R^*}$. Damit erhalten wir für $X \in N_R' \cap M_R$

$$R^* X R = FXF = RXR^* \quad \text{(siehe [3])}$$

also insbesondere $R^2 X = XR^2$. Mit der Spektralzerlegung von R und der Annahme an das Spektrum sieht man auch $RX = XR$. Also kommutiert X mit $R_i\ \forall i \in \mathbb{N}$, denn $X \in \mathrm{End}(V) \otimes 1 \otimes \dots$ und wegen

$$\phi(X) = \operatorname*{s-lim}_n R_1^* R_2^* \dots R_n^* X R_n \dots R_2 R_1 = X$$

ist X ein Fixpunkt von ϕ und so gilt $X \in \mathbb{C}1$. □

Wir erhalten nun:

Satz 4.12 Sei R eine $\mathcal{R}$-Matrix vom Temperley-Lieb Typ α bezüglich der Spektralprojektion P und für das Spektrum $\sigma_R = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ von R gelte $\lambda_1 \neq \pm\lambda_2$. Dann gilt

$E_{1\otimes N_R}(X)P_1 = P_1XP_1 \ \forall X \in 1 \otimes M_R$, $\alpha \neq 0$ sowie

$$[M_R : N_R] = \mathrm{tr}(P)^{-1} = \frac{1}{\alpha}.$$

Beweis: Sei $\tilde{M} := (\{P_1\} \cup 1 \otimes M_R)''$. Da P eine Spektralprojektion von $R = \lambda_1 P + \lambda_2(1-P)$ ist, gilt $\tilde{M} = M_R$ und damit ist $\tilde{M}$ ein Faktor. Wir betten M_R und N_R mit dem Shift ϕ in $\tilde{M}$ ein. $E_{\phi(N_R)}$ bezeichne die spurerhaltende bedingte Erwartung von $\phi(M_R)$ auf $\phi(N_R)$ (siehe 4.9). Nach Annahme gilt:

$$P_1P_2P_1 = \alpha P_1$$

Wegen 4.11 haben wir auch $E_{\phi(N_R)}(P_2) \in \mathbb{C}1$ und daher

$$E_{\phi(N_R)}(P_2)P_3 = E_{\phi(N_R)}(P_3P_2P_3) = \alpha E_{\phi(N_R)}(P_3) = \alpha P_3,$$

also $E_{\phi(N_R)}(P_2) = \alpha 1$ und $P_1P_2P_1 = E_{\phi(N_R)}(P_2)P_1$. Ferner gilt für ein reduziertes Wort w mit Form wie in 4.8 aus den $(P_i)_{i\geq 2}$ falls $2 < k_1$:

$$P_1wP_1 = wP_1 = E_{\phi(N_R)}(w)P_1.$$

Ist $2 = k_1$, so ist

$$\begin{aligned}
P_1wP_1 &= P_1(P_{i_1}P_{i_1-1}\dots P_{k_1})\dots(P_{i_l}P_{i_l-1}\dots P_{k_l})P_1 \\
&= (P_{i_1}P_{i_1-1}\dots P_3P_1P_2P_1)\dots(P_{i_l}P_{i_l-1}\dots P_{k_l}) \\
&= (P_{i_1}P_{i_1-1}\dots P_3E_{\phi(N_R)}(P_2)P_1)\dots(P_{i_l}P_{i_l-1}\dots P_{k_l}) \\
&= E_{\phi(N_R)}((P_{i_1}P_{i_1-1}\dots P_2)\dots(P_{i_l}P_{i_l-1}\dots P_{k_l}))P_1 \\
&= E_{\phi(N_R)}(w)P_1.
\end{aligned}$$

Wegen Linearität und Stetigkeit ist nun gezeigt: $E_{\phi(N_R)}(X)P_1 = P_1XP_1 \ \forall X \in \phi(M_R)$. Jetzt folgt mit 4.10 schon die Existenz einer Isomorphie $\phi : M_2 \to \tilde{M}$ mit $\phi(e_1) = P_1$ und wegen der Eindeutigkeit des Spurzustands folgt

$$\tau_{M_2}(e_1) = \tau_{\tilde{M}}(P_1) = \mathrm{tr}(P) = \tau_{M_R}(P_1) = \tau_{M_R}(E_{N_R}(P_1)) = \tau_{M_R}(\alpha 1) = \alpha.$$

Also ist $\alpha \neq 0$ und mit 3.14 5. erhält man $\tau_{M_2}(e_1) = [M_R : N_R]^{-1}$. □

Man könnte natürlich die Voraussetzung $\lambda_1 \neq -\lambda_2$ abschwächen zu $\mathrm{ptr}(R) \in \mathbb{C}1$. Jedoch bringt dies keine neuen Erkenntnisse, da die einzigen involutiven $\mathcal{R}$-Matrizen mit trivialer partieller Spur ± 1 und Flips sind (siehe z.B. [10]). Die Flips $F \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^n)$ für $n \geq 3$ sind nicht Temperley-Lieb.

Korollar 4.13 Eine $\mathcal{R}$-Matrix $R = \lambda_1 P^{\lambda_1} + \lambda_2 P^{\lambda_2}$ mit $\mathrm{ptr}(R) \in \mathbb{C}1$ ist Temperley-Lieb, genau dann wenn eine Spektralprojektion $P = P^{\lambda_i}$ die spurerhaltende bedingte Erwartung $E_{\phi(N_R)}$ realisiert:

$$E_{\phi(N_R)}(X)P_1 = P_1XP_1 \ \forall X \in \phi(M_R)$$

Beweis: Ist R Temperley-Lieb mit $\mathrm{ptr}(R) \in \mathbb{C}1$, so wurde die Aussage in 4.12 gezeigt. Gilt umgekehrt $E_{\phi(N_R)}(X)P_1 = P_1XP_1 \ \forall X \in 1 \otimes M_R$ so erhält man direkt

$$P_1P_2P_1 = E_{\phi(N_R)}(P_2)P_1 = \mathrm{ptr}(P)P_1 = \mathrm{tr}(P)P_1$$

und R ist Temperley-Lieb mit $\alpha = \mathrm{tr}(P) \in \mathbb{C}$. □

Bemerkung 4.14 Zunächst könnte man erwarten, dass eine konkrete Realisierung des Index als Spur einer Projektion wie in 4.12 immer möglich ist, da mit der Projektion $e := \frac{1}{d}\sum_{i,j}^{d} e_{ij} \otimes e_{ij}$ für beliebiges $X \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ und $\mathrm{ptr}' := \mathrm{tr} \otimes 1$

$$(1 \otimes 1 \otimes \mathrm{ptr}'(X))(e \otimes 1) = (e \otimes 1)(1 \otimes X)(e \otimes 1)$$

gilt. (Dabei sind die $(e_{ij})_{ij} \subset \mathrm{End}(V)$ die Standard Elementarmatrizen.) Siehe auch Wassermann [19, VI]. Allerdings ist es im Allgemeinen nicht möglich eine Projektion $P \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ zu finden, die mit $\tilde{M} := (\{P_1\} \cup 1 \otimes M_R)''$ die Anforderungen von 4.10 erfüllt und eine Isomorphie $\tilde{M} \cong M_2$ induziert: Betrachte die multiplizitätsfreie, involutive $\mathcal{R}$-Matrix

$$1_1 \boxplus 1_2 \boxplus 1_3 \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^6).$$

Nach [10] sind die Thoma Parameter $\alpha = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. In diesem Fall gilt nach Tanner $[M_R : N_R] = 6 + 3 + 2 = 11$. Nun ist für jede Projektion $P \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^6 \otimes \mathbb{C}^6)$

$$\mathrm{tr}(P) \in \{\frac{n}{36} \mid 0 \leq n \leq 36,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Aber $\frac{1}{11} \neq \frac{n}{36}$ für $0 \leq n \leq 36,\ n \in \mathbb{N}$.

Das folgende Lemma nimmt eine zentrale Rolle ein:

Lemma 4.15 Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus 4.12 gilt

$$\mathrm{tr}(P) = |\mathrm{ptr}(R)|^2 = |\mathrm{tr}(R)|^2$$

Beweis: Wir wollen $E_{\phi(N_R)}(R_2^*)E_{\phi(N_R)}(R_2) = E_{\phi(N_R)}(P_2)$ einsehen. Da beide Seiten der Gleichung in $\mathbb{C}1$ sind, ist dies äquivalent zu $E_{\phi(N_R)}(R_2^*)E_{\phi(N_R)}(R_2)P_1 = E_{\phi(N_R)}(P_2)P_1$. Wir erhalten mit (YBE), $P_1R_1 = \lambda_1 P_1$ sowie $\overline{\lambda_1}\lambda_1 = 1$

$$P_1R_2^*P_1R_2P_1 = P_1R_1^*R_2^*P_1R_2R_1P_1 = P_1(1 \otimes P_1)P_1 = P_1P_2P_1.$$

Nun ist aber wegen 4.12 schon

$$E_{\phi(N_R)}(R_2^*)P_1E_{\phi(N_R)}(R_2)P_1 = P_1R_2^*P_1R_2P_1 = P_1P_2P_1 = E_{\phi(N_R)}(P_2)P_1$$

und die Aussage folgt mit $E_{\phi(N_R)}(R_2^*)P_1E_{\phi(N_R)}(R_2)P_1 = E_{\phi(N_R)}(R_2^*)E_{\phi(N_R)}(R_2)P_1$, da $E_{\phi(N_R)}(R_2) = \mathrm{ptr}(R)1 = \mathrm{tr}(R)1 \in \mathbb{C}1$. □

Wir nehmen im Folgenden $\lambda_1 = -1$ an, da dies immer durch Multiplikation mit $u \in S^1$ erreicht werden kann und keine Einschränkungen für die strukturellen Untersuchungen liefert.

Korollar 4.16 Für eine Temperley-Lieb $\mathcal{R}$-Matrix $R = -P + \lambda_2(1 - P),\ \lambda_2 \neq \pm 1$ gilt

$$[M_R : N_R] = \frac{1}{\alpha} \in \{2, 3\}$$

und

$$\alpha = \frac{1}{2} \iff \lambda_2 \in \{-i, i\},\ \alpha = \frac{1}{3} \iff \lambda_2 \in \{e^{-i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{3}}\}$$

Beweis: Mit 4.15 und $\mathrm{ptr}(R) = -\alpha + \lambda_2(1 - \alpha)$ erhalten wir

$$|-\alpha + \lambda_2(1 - \alpha)|^2 = \alpha. \tag{4.2}$$

Angenommen $0 < \alpha < \frac{1}{4}$. So erhält man wegen $|\lambda_2| = 1$ und $|-\alpha+\lambda_2| \geq |\alpha-1| > \frac{3}{4}$ auch

$$\Big| - \alpha + \lambda_2 - \lambda_2\alpha \Big| \geq \Big| |-\alpha+\lambda_2| - \alpha \Big| > \Big| \frac{3}{4} - \alpha \Big| > \frac{1}{2}$$

sowie

$$\Big| - \alpha + \lambda_2 - \lambda_2\alpha \Big|^2 > \frac{1}{4} > \alpha$$

im Widerspruch zu $|-\alpha+\lambda_2-\lambda_2\alpha|^2 = \alpha$. Also folgt mit 4.12 und Jones Satz 3.19 $\alpha^{-1} \in \{1,2,3,4\}$, da die Spur $\alpha = \mathrm{tr}(P)$ rational ist. Den trivialen Fall $\alpha = 1$ können wir ignorieren. Elementares Rechnen mit (4.2) zeigt nun

$$\alpha = \frac{1}{2} \iff \lambda_2 \in \{-i, i\},\ \alpha = \frac{1}{3} \iff \lambda_2 \in \{e^{-i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{3}}\}.$$

Für $\alpha = \frac{1}{4}$ erhält man $\lambda_2 = 1$. Mit der oben erwähnten Abschwächung von 4.12 sieht man, dass dies genau dem Fall $F \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^2)$ entsprechen würde. $\square$

Involutive Temperley-Lieb $\mathcal{R}$-Matrizen ungleich $F \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^2)$ sind äquivalent zu multiplizitätsfreien $\mathcal{R}$-Matrizen mit genau zwei von 0 verschiedenen Thoma Parametern (siehe [10]). In diesem Fall ist die Indexfrage nach Tanner geklärt und allgemein ist jetzt für eine beliebige Temperley-Lieb $\mathcal{R}$-Matrix R gezeigt:

$$[M_R : N_R] = \|\mathrm{ptr}(R)^{-1}\|_2^2.$$

Literaturverzeichnis

[1] **Anantharaman, C., Popa, S.** *An introduction to II_1 factors.* 2010 unter https://www.math.ucla.edu/~popa/Books/IIun.pdf

[2] **Blackadar, B.** *Operator Algebras. Theory of C*-Algebras and Von Neumann Algebras.* Springer, 2006

[3] **Conti, R., Lechner, G.** *Yang-Baxter endomorphisms* unter https://doi.org/10.48550/arXiv.1909.04127

[4] **Gohm, R., Köstler, C.** *Noncommutative independence from the braid group B_∞.* Commun. Math. Phys., 289(2):435-482, 2009

[5] **Jones, V.** *Notes on Von Neumann Algebras.* Universität Vanderbilt, 2015 unter https://my.vanderbilt.edu/jonesvf/files/2020/10/vonNeumann2015.pdf

[6] **Jones, V.** *Index for Subfactors.* Inventiones Mathematicae Springer, 1983

[7] **Jones, V.** *A polynomial invariant for knots via Von Neumann Algebras.* Bulletin AMS 1985, Vol.12, No.1, 103-111

[8] **Jones, V., Sunder, V.** *Introduction to Subfactors.* Cambridge University Press, Lecture Note Series 234, 1997

[9] **Kadison, R., Ringrose, J.** *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras I, II.* Academic Press, 1983/1986

[10] **Lechner, G., Pennig, U., Wood, S.** *Yang-Baxter representations of the infinite symmetric group* unter https://doi.org/10.48550/arXiv.1707.00196

[11] **Leinster, T.** *Basic Category Theory.* Cambridge University Press, 2014 unter https://doi.org/10.48550/arXiv.1612.09375

[12] **Murphy, G.** *C*-Algebras and Operator Theory.* Academic Press, 1990

[13] **Murray, F., von Neumann, J.** *On Rings of Operators I-IV.* Annals of Mathematics, 1936-1943

[14] **Pimsner, M., Popa, S.** *Iterating the basic construction.* Transactions of the AMS, VOL. 310, No. 1, 1988

[15] **Rédei, M.** *Quantum Logic in Algebraic Approach.* Springer, 1998

[16] **Speicher, R.** *Lecture Notes on Von Neumann Algebras, Subfactors, Knots and Braids, and Planar Algebras.* Universität des Saarlandes, 2016

[17] **Strătilă, Ş., Zsidó L.** *Lectures on Von Neumann Algebras.* Abacus Press, 1979

[18] **Takesaki, M.** *Theory of Operator Algebras I, II, III.* Springer, 2002/2003

[19] **Wassermann, A.** *Coactions and Yang-Baxter Equations for Ergodic Actions and Subfactors.* Operator Algebras and applications 2, London. Math. Soc. Lect. Notes 136 (1988), 203-236.